INSTITUTIONES MATHESEOS,

PHILOSOPHIÆ AUDITORUM USIBUS ACCOMMODATÆ

A

JOAN. BAPT. HORVATH,
PRESBYTERO SÆCULARI,
IN UNIVERSITATE TYRNAVIENSI
PHYSICÆ PROFESSORE PUBLICO,
ORDINARIO.

TOMUS I.

COMPLECTENS ELEMENTA
ARITHMETICÆ, ET ALGEBRÆ.

EDITIO NOVISSIMA.

AUGUSTÆ VINDELICORUM.
Sumptibus Matthæi Rieger p. m. filiorum.
MDCCLXXVI.

BIBLIOPOLÆ
LECTORI BENEVOLO.

Qui humanioribus Diſciplinis, aut addiſcendis, aut tradendis, aut majori induſtria excolendis ſtudia, viresque ſuas impendunt; nihil magis exoptant, quam ut Libri illi, qui ob ſuam ſingularem præſtantiam publicis prælectionibus conſecrati ſunt, integri omnino, & completi habeantur. Æquiſſimis hisce Literatorum Hominum Votis annuentes, Inſtitutionibus Philoſophicis Clariſſimi Viri D. Joan. Bapt. Horvath, quæ jam pridem publicis Prælectionibus deſtinatæ, iteratam brevi tempore Editionem obtinuerunt, Inſtitutiones Mathematicas Ejusdem emeriti Philoſophiæ Profeſſoris adjungere, ac nova pariter Editione illuſtrare conſultum du-

* 2 ximus,

ximus, & rei literariæ ſummopere proficuum. Ad capeſſendum hoc negotium multa, eaque ſatis ponderoſa motiva nos impulerunt; imprimis enim ipſe Eruditiſſimus Auctor pro ſua ſingulari humanitate nobis Exemplar ſuarum Inſtitutionum Mathematicarum transmiſit, easdemque pro plenius intelligendis Inſtitutionibus ſuis Philoſophicis non modo utiles, ſed & neceſſarias eſſe cenſuit: hæ autem nullam hactenus Editionem in Germania ſortitæ ſunt. Dein Inſtitutiones Philoſophicæ ſæpe ſæpius ad præſentes has provocant, ut adeo alterius Auctoris ſubſidiis Mathematicis Tyrones hucusque opus habuerint. Denique eadem in hac Matheſi præclara relucet methodus, quæ in Logica, Methaphyſica, & Phyſica utiliſſime fuerat obſervata: Age proin Lector Benevole, & has, ſicuti priores Inſtitutiones, tibi ſummopere commendatas habe.

CON-

CONSPECTUS MATERIARUM TOMI PRIMI.

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

ELEMENTA ALGEBRÆ.

SECTIO PRIMA.
DE PRIMIS CALCULIS ALGEBRAICIS.

SECTIO SECUNDA.

DE QUANTITATUM POTENTIIS, & RADICIBUS.

SECTIO TERTIA.

DE PROBLEMATUM RESOLUTIONE, SEU ANALYSI.

SECTIO

SECTIO QUARTA.

DE VARIIS QUANTITATUM RELATIONIBUS.

PROLEGOMENA
MATHESEOS.

1.

Mathesis re ipsa idem significat Græcis, quod Latinis *scientia*, vel *disciplina;* usu tamen receptum est, ut vocabulo hoc earum scientiarum naturalium classis designetur, quæ pro objecto *quantitatem* habent: unde etiam Mathesis vulgo *Scientia quanti* nominari solet. Porro *quantitas* appellatur quævis magnitudo, quæ additione augeri, vel ablatione imminui potest: e. g. numeri, lineæ, pondera, quoniam augeri, ac imminui possunt, *quantitates sunt.*

2. Mathesis peculiarem quemdam modum usurpat in veritatibus suis inveniendis, ac demonstrandis; qui modus *methodus mathematica* nuncupatur. Solent in ea adhiberi Definitiones, Hypotheses, Axiomata, Postulata, Theoremata, Problemata, Lemmata, Corollaria, & Scholia.

3. *Definitio* est distincta *rei*, aut *nominis*, de quo agitur, explicatio. Ut si dicas: *numerus est collectio unitatum.*

4. *Hypothesis*, seu *Suppositio* sunt res, vel signa rerum ad libitum assumpta, ex institutione hominum. Sic 1) signum + est assumptum pro signo additionis: nimirum si quantitas una signo + interjecto adjungatur

tur alteri; significatur, eam quantitatem, cui signum illud præfixum est, alteri addi. e. g. $5 + 3$ significat, numerum 3 addi numero 5, id est, significat *summam*, seu collectionem numerorum 5 & 3. Porro signum + solet enunciari vocabulo *plus*; adeoque $5 + 3$ sic enunciatur: *quinque plus tria*. 2) Signum — est assumptum pro signo subtractionis: nimirum si quantitas una signo — interjecto adjungatur alteri; significatur, eam quantitatem, cui signum illud præfixum est, ab altera tolli. e. g. $5 - 3$ significat, numerum 3 tolli a numero 5, id est, numerum 5 numero 3 mulctari. Porro signum — solet enunciari vocabulo *minus*; adeoque $5 - 3$ sic enunciatur: *quinque minus tria*. 3) Signum = est signum æqualitatis; id est, significat, eas quantitates, inter quas interjicitur, esse æquales: unde etiam vocabulo *æquale* solet enunciari. Hinc e. g. $5 - 3 = 2$, tantundem significat, ac: 5 — 3 *æquale* 2. Plures Mathematicorum hypotheses suis locis adnotabimus.

5. Notanda hoc loco est propositionis in theoreticam, & practicam divisio. Propositio *theoretica*, seu *speculativa* est, in qua nonnisi veritas quæpiam in sola speculatione sistens enuntiatur. e. g. *Totum est majus sua parte*. *Practica* vero propositio dicitur illa, in qua fieri quidpiam, aut fieri debere asseritur, vel postulatur. e. g. *Lineam rectam in duas æquales partes secare.* Utraque hæc propositionum classis dividitur in propositiones indemonstrabiles, & demonstrabiles. Propositio *indemonstrabilis* est, cujus veritas solis terminis rite apprehensis evidenter patet, ac proinde cujus veritas lumine naturæ nota est. e. g. *Totum est majus sua parte*. *Demonstrabilis* autem ea dicitur, cujus veritas ex aliis propositionibus notis evidenter infertur. His intellectis facilis jam est definitio axiomatis, postulati, theorematis, & problematis. Nimirum

6. *Axioma* est propositio theoretica indemonstrabilis. e. g. *Totum est majus sua parte.*

7. *Postulatum* est propositio practica indemonstrabilis. e. g. *A quovis puncto ad aliud linea recta duci potest.*

8. *Theorematis* nomine venit propositio theoretica demonstrabilis. e. g. *Anguli ad verticem oppositi sunt æquales.*

æquales. Theorematis demonftrationem multi his notis finiunt: Q. E. D. id eft, *Quod erat demonftrandum.*

9. *Problema* eft propofitio practica demonftrabilis. e. g. *Lineam rectam in duas æquales partes dividere.* Propofitioni problematis fubjicitur ejusdem *Refolutio*, feu praxis, qua problemati propofito fatisfaciendum eft: hanc confequitur *Demonftratio*, quæ oftendit praxim illam, feu refolutionem effe bonam, ac legitimam. *Refolutio* a multis finiri folet his notis: Q. E. F. id eft, *Quod erat faciendum.*

10. *Lemma* eft demonftratio prævia, quæ ad illuftre quoddam theorema, vel problema facilius demonftrandum nonnunquam præmittitur.

11. *Corollaria*, feu *confectaria* funt propofitiones, quæ ex præcedente Definitione, aut Axiomate, Theoremate &c. faciliime deduci poffunt. Majoris tamen claritatis gratia, brevis & plana demonftratio etiam corollario frequenter adjicitur.

12. *Scholia* denique funt adnotationes quædam poft theoremata, problemata &c. poni folitæ, quibus obfcura declarantur, ufus doctrinæ indicatur, eruditio aliqua proponitur, aut de quacunque re Lector utiliter admonetur.

Scholion. Definitiones has, quæ proxime præcedentibus octo numeris continentur, in Logica quoque *Differt.* II. peculiari §pho pertractavimus.

13. Quod attinet ad ordinem, quem Mathefis in tradendis veritatibus fuis tenere confuevit: methodus mathematica exigit, ut ante omnia voces, & res omnes, de quibus agendum eft, perfpicue definiantur; præmittantur Axiomata, Hypothefes, & Poftulata, fi iis opus fit; tum ftatus quæftionis (id eft, theorematis, vel problematis) clare, diftincte, & quatenus fieri licet, breviffime proponatur; factam propofitionem confequatur itidem clara, & diftincta rei propofitæ demonftratio. Porro in demonftrationibus nihil adhibeatur, quod non fit jam prius demonftratum, definitum, aut declaratum. Ex his utilia corollaria deducantur; & fcholia, fi opus fit, fubjiciantur. Ordo autem theorematum caute obfervandus eft; ut maxime fimplicia,

& facillima præmittantur, ex quibus ad sublimiora tanquam per gradus fiat progressus.

Scholion. Mathematici adlaborare solent, ut quam maxime succinctas adferant demonstrationes, vitataque omni verborum superfluitate, rem uno alterove enthymemate, aut syllogismo, si fieri possit, conficiant. At non omnia sane, quæ superflua videri possunt comparate ad exculta scientiis ingenia, æque superflua sunt etiam comparate ad Tirones, sublimioribus ratiociniis nondum assuetos. Quapropter ego quidem, cui Tironum utilitas cumprimis cordi est, piaculo mihi nequaquam ducam, aliqua nonnihil fusius, enucleatiusque proponere, quam nonnulli rigidiores Critici forte vellent.

14. Ut elementa hæc, aliosque libros mathematicos Tiro cum fructu legat, sequentia monita cumprimis observet. 1) Res singulas eo legat ordine, quo propositæ sunt in libro, nec transiliat rem ullam non intellectam, præsertim si adsit peritus quispiam, quem consulere possit. Methodus enim mathematica est ejusmodi, ut posteriores veritates continenter a prioribus dependeant, neque intelligi sine prævia priorum veritatum notitia possint. 2) Dum demonstrationem legit, videat, an cujuslibet enunciationis, quæ demonstrationem illam ingreditur, sensum, & veritatem assequatur. Quod si de sensu, aut veritate cujuspiam dubitet; citatum eo loco numerum diligenter relegat, & plerumque dubium illico sibi sublatum experietur. Plurima enim dubia Tironibus idcirco exoriuntur, quod ea, quæ præcesserant, & a quibus posteriores demonstrationes dependent, e memoria exciderint. 3) Plurimum ad profectum sibi conferre experietur Tiro scholasticus, si materiam in scholis proxime explanandam ipse prævie perlegat, marteque proprio intelligere satagat, tum non intellecta adnotet, eorumque cumprimis explicationem summa in scholis attentione excipiat. 4) Si veritas demonstrata quoquo modo in praxim deduci possit, ejus praxim per singulos casus variando exerceat.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Numeris generatim; tum speciatim de Numeratione.

15. Numerus (circa quem omnis versatur Arithmetica) est *collectio unitatum*; ita ut numerus quilibet saltem duas unitates in se complecti debeat. Hinc etiam unitas *non numerus*, sed *principium numeri* dici consuevit.

16. Signa, seu notæ, quas ad exprimendos numeros adhibet Arithmetica, sunt hæ decem: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Novem priores notæ, si earum unaquæque seorsim, & extra aliarum consortium collocetur, denotant unitates: nempe 1, denotat unam unitatem; 2, duas; 3, tres; 4, quatuor; 5, quinque; 6, sex; 7, septem; 8, octo; 9, novem. Postrema nota, seu o (quæ *zerus* vocari solet) seorsim collocata prorsus nihil significat. Unde etiam nonnisi novem illæ priores notæ vocantur *significantes*.

17. Eædem hæ notæ numericæ, quum plures conjunguntur, ordineque collocantur, peculiarem quendam valorem nanciscuntur etiam a loco, quem in ejusmodi ordine occupant. Scilicet in quolibet id genus ordine nota dextima significat unitates; secunda versus sinistram nota significat decades; tertia centenarios; quarta millenarios &c. e. g. In hac ordine: 4672, dextima nota 2, valet tantum simplices unitates, nimirum duas; sequens versus sinistram nota 7, valet tot decades, quot unitates simplices significare solet tunc, quum extra consortium aliarum collocatur, ac proinde valet septem decades, seu *septuaginta*; tertia versus sinistram nota 6. valet sex centenarios, seu *sexcenta*; quarta de-

nique nota 4. valet quatuor millenarios, seu *quatuor millia.*

18. Corollarium. Itaque in quolibet notarum numericarum ordine valor earundem notarum a dextra versus sinistram progrediendo continenter crescit in decuplum; ita ut in hoc e. g. ordine: 4672, quælibet unitas numeri 7 decies plus valeat, ac valeat quælibet unitas numeri 2 dextram versus proxime collocati, item quælibet unitas numeri 6 decies plus valeat, ac valeat unitas quælibet numeri 7, & sic porro.

19. Quodsi eo casu, quo plures numericæ notæ ordine collocandæ sunt, cuipiam loco nulla competat ex novem illis significantibus notis, quas n. 16. descripsimus; locum illum zerus occupat. e. g. Sit exprimendus notis arithmeticis hic numerus: *tria millia quinquaginta.* Hic numerus constat tribus millenariis, quinque decadibus, nullo centenario, nulla unitate simplice. Itaque locum centenariorum, & unitatum simplicium, adeoque locum a dextra versus sinistram tertium, item dextimum (17) zerus occupet, est necesse: hoc est, eum numerum hic notarum ordo debet exprimere: 3050. Si enim omissis zeris scriberetur 35; hic ordo jam non *tria millia quinque*, sed *triginta quinque* significaret. Unde patet valorem numeri eatenus augeri adjectis zeris, quatenus hoc pacto notæ significantes magis versus sinistram retruduntur.

Scholion. Signa numerica n. 16. descripta, quoniam ab Arabibus inventa sunt, numeri *Arabici* solent nuncupari. Numeri Romani hodierni sunt sequentes.

I.	II,	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,

XX.	XXX.	XL.	L.	LX.	LXX.	LXXX.	XC.
20,	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90,

C.	CC.	CCC.	CD.	D.	DC.	DCC.
100,	200,	300,	400,	500,	600,	700,

DCCC.	CM.	M.
800,	900,	1000.

20. Nu-

20. *Numeratio* eſt ars ſcribendi, & enunciandi quoscunque numeros ſecundum valores ſuos totales.

21. PROBLEMA I. *Numerum quemcunque propoſitum enunciare.*

RESOLUTIO. 1*mo.* Numerus propoſitus inchoando a dextris ſiniſtram verſus dividatur in claſſes per *virgulas,* ſive *commata*, cuilibet claſſi aſſignando tres numeros: claſſis ſiniſtima poteſt etiam duabus, aut una nota conſtare. e. g. Si detur hic numerorum ordo: 28673256913294; eum hoc modo per commata divide: 28, 673, 256, 913, 294.

2*do.* Poſt virgulam dextimæ claſſis ſignetur ſuperne *puncto* uno is numerus, qui verſus ſiniſtram ſequitur; & poſt virgulam ſecundæ claſſis ſequens numerus ſignetur ſuperne *virgula* una. Poſt tertiæ claſſis virgulam notetur ſuperne numerus puncto uno; poſt quartæ claſſis virgulam notetur numerus duabus virgulis: & ſic porro a dextra ſiniſtram verſus progredere alternando ſuperne puncta, & virgulas. Attamen dum ſecunda vice ponenda eſt ſuperne virgula, ea jam duplicata ſit, oportet; triplicata autem, ſi tertia vice poni debeat, & ſic porro. Itaque ſuperius datus numerorum ordo hoc modo erit ſignandus punctis, & virgulis:

$$2''8,\dot{6}73,2'56,\dot{9}13,294.$$

3*tio.* Peracta hac partitione, prima claſſis ſeu dextima, a dextris ſiniſtram verſus regrediendo ſignificabit unitates, decades, & centenarios ſimplices: ſecunda claſſis ſignificabit unitates, decades, centenarios millium: 3tia unitates, decades, centenarios millionum; nam virgula ſuperne poſita, eſt ſignum millionum: 4ta unitates, decades, centenarios millium millionum. 5ta unitates, decades, centenarios bimillionum; duplex enim virgula ſuperne poſita ſignum eſt bimillionum &c. En valorem ordinis ſuperius dati:

2	8,	6	7	3,	2	5	6,	9	1	3,	2	9	4.
Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates	Centenarii	Decades	Unitates
Bimillionum.		Millium Millionum.			Millionum.			Millium.			Simplices.		

Itaque hunc numerorum ordinem sic enunciabis: viginti octo *bimilliones*, sexcenta septuaginta tria *millia millionum*, ducenti quinquaginta sex *milliones*, nongenta tredecim *millia*, ducenta nonaginta quatuor.

Demonstratio hujus enunciationis facilis est. Dum enim plures notae numericae conjunguntur, earum valor a dextra versus sinistram progrediendo continenter crescit in decuplum, ita ut quaelibet unitas numeri sinistram versus collocati decies plus valeat, ac valeat quaecunque unitas numeri ipsi dextram versus proximi (18): atqui, si dictas leges observes in enunciando numerorum valore, singulis unitatibus cujuslibet numeri sinistram versus collocati decies majorem tribuis valorem, ac tribuas cuilibet unitati numeri dextram versus proxime collocati, uti patebit consideranti; quodsi ergo dictas leges in enunciando numerorum valore observes, eos numeros rite enuncias.

22. Corollarium I. Igitur hic e. g. numerus: 2, 658, 934, hoc modo est enunciandus: *Duo milliones, sexcenta quinquaginta octo millia, nongenta triginta quatuor.*

23. Coroll. II. Eodem modo enuntiantur etiam ejusmodi numeri, in quibus unus, aut plures zeri reperiuntur; hoc solum notato, quod cum zerus nihil significet (16), zeri non enuncientur. e. g. Hunc numerum: 304, 604 sic enunciabis: *tercenta quatuor millia, sexcenta quatuor.* Scilicet locum decadum simpli-

cium,

nium, item decadum millium zerus occupat; itaque neutræ decades sunt enunciandæ. Hunc vero numerum: 204, 060, 010 sic enunciabis: *ducenti quatuor milliones, sexaginta millia, decem.*

Scholion. Si admodum longus proponeretur numerorum ordo, in quo aliqui numeri juxta 2dam legem n. 21. datam tribus, quatuor, aut etiam quinque virgulis essent superne signandi; tres virgulæ *trimillionem*, quatuor virgulæ *quadrimillionem*, & sic porro, significarent.

CAPUT SECUNDUM.

De Additione, & Subtractione numerica.

24. *Species* numeros computandi sunt quatuor: scilicet *Additio, Subtractio, Multiplicatio,* & *Divisio.* Hoc Capite de Additione, & Subtractione duntaxat agemus.

25. Numerus dividi solet in purum, & mixtum. Numerus *purus,* sive *abstractus* est, qui solam multitudinem significat, quin exprimat, cujus rei sit illa multitudo. Ut si dicas: *quinque, viginti, centum* &c. Numerus *mixtus,* sive *concretus* dicitur, qui præter multitudinem simul exprimit, cujusnam rei sit illa multitudo. Ut si dicas: *tres nummi, quatuor floreni, decem urnæ vini* &c.

26. Duo, aut plures numeri mixti inter se comparati vel sunt homogenei, vel heterogenei. *Homogenei* dicuntur, qui significant res ejusdem speciei, & denominationis: e. g. *quatuor floreni,* & *novem floreni.* *Heterogenei* sunt, qui significant res diversæ speciei, & denominationis: e. g. *tres floreni,* & *septem cruciferi;* item *quinque urnæ vini,* & *decem orgyæ lignorum* &c.

27. Numeri heterogenei subdividuntur in reducibiles, & irreducibiles. *Reducibiles* sunt, qui ad eandem speciem, denominationemque reduci possunt. e. g. *Duo grossi,* & *quinque cruciferi* sunt numeri ad eandem denominationem reducibiles. Nam imprimis duos grossos in sex cruciferos resolvendo, loco duorum grosso-

rum, & quinque cruciferorum aequiro *undecim* cruciferos: quo pacto grossi ad cruciferos reducuntur. Deinde si tres cruciferos in unum grossum componam; loco eorundem duorum grossorum, & quinque cruciferorum habeo tres grossos, & 2 cruciferos: ac proinde ii cruciferi (saltem ex aliqua parte) ad grossos reduci possunt. Numeri heterogenei *irreducibiles* vocantur illi, qui ad eandem speciem, seu denominationem reduci nequeunt: e. g. *quinque urnæ vini, & decem orgyæ lignorum.*

28. *Additio numerica* est duorum, vel plurium numerorum homogeneorum in unum *totum*, seu *summam* collectio. Ajo: *numerorum homogeneorum.* Nam heterogenei numeri, e. g. tres homines, & septem floreni, in unam summam cogi utique non possunt. Hinc si numeri heterogenei sint *reducibiles* (27); prius reducendi sunt, seu reddendi homogenei, at tum primum in unam summam cogendi. e. g. Tres grossi & sex cruciferi addi poterunt, si sex cruciferos reducas ad duos grossos, hosque tribus illis reliquis grossis addideris, ut acquiras quinque grossos. Porro numeri, qui in unam summam cogendi sunt, *addendi nuncupantur.*

29. PROBLEMA II. *Addere numeros.*

Resolutio. *1mo.* Numeri homogenei *addendi* infra se invicem hac lege scribantur, ut unitates respondeant unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c.

2do. Sic collocati numeri subducantur linea, ne *addendi* confundantur cum *summa;* tum inchoetur collectio a dextris, ac proinde ab unitatibus, & summa unitatum scribatur sub linea directe infra unitates: eodem modo colligantur decades, earumque summa scribatur directe infra decades: summa centenariorum scribenda est infra centenarios, millenariorum infra millenarios, & sic porro.

EXEMPLUM hujus 2dæ Regulæ.

Addendi	6402
	554
	23
Summa	6979

Nim-

Nimirum ab unitatum additione inchoo operationem dicens: 3 & 4 *ſunt* 7, *additis* 2 *ſunt* 9; *adeoque* 9 *ſcribo infra unitates.* Tranſiens ad decades dico: 2 & 5 *ſunt* 7, *addito zero manent* 7; *igitur* 7 *ſcribo infra decades.* Proſequor: 5 & 4 *ſunt* 9; *quem numerum centenariis ſubſcribo.* Demum numerum 6, quoniam nullus alter adeſt illi addendus, ſolitarium depono infra eum locum, quem inter *addendos* obtinet. Atque ita obtineo ſummam = 6979.

3*tio*. Si unitatum ſumma excedat numerum 9, ac proinde ſi excreſcat in numerum pluribus notis numericis exprimendum; ſola dextima nota ſcribatur infra lineam, altera vero mente retineatur interim, ac poſtea addatur decadibus in claſſe ſequenti. Eodem modo adde decades, deinde centenarios &c.

EXEMPLUM *hujus* 3*tiæ Regulæ.*

Addendi	9 7 8 5
	4 6 0 6
	8 1 2
Summa	1 5 2 0 3

Nimirum ab unitatibus inchoando dico: 2 & 6 *ſunt* 8, *additis* 5 *ſunt* 13; *dextimam notam* 3 *ſcribo infra unitates, alteram* 1, *mente retineo mox decadibus addendam.* Tranſeundo ad decades dico: 1 (quod nempe mente retinui) & 1 *ſunt* 2, *addito zero manent* 2, *additis* 8 *ſunt* 10; *dextimam notam, ſeu zerum infra decades ſcribo, altera centenariis addenda remanet.* Proſequor: 1 & 8 *ſunt* 9, *additis* 6 *ſunt* 15, *additis* 7 *ſunt* 22; *dextimam notam* 2 *infra centenarios ſcribo, altera remanet. Porro* 2 & 4 *ſunt* 6, *additis* 9 *ſunt* 15; *quem numerum depono ita, ut dextima nota* 5 *infra unitates millenariorum veniat.*

30. Demonstratio. Additio numerica eſt datorum numerorum homogeneorum in unam ſummam collectio (28): atqui per has regulas in unam ſummam colliguntur omnes dati numeri homogenei unitatum, decadum, centenariorum &c. uti perſpicuum eſt expendenti: ergo per has regulas additio numerica rite peragitur.

Schol.

Schol. 1. Aliqua adhuc additionis exempla adjicere lubet, in quibus Tirones se se exercere queant.

Addendi	96872 39059 8797	*Addendi*	58760 69740 1200
Summa	144728	*Summa*	129700
Addendi	6873 7609 9875	*Addendi*	717692 835677 446631
Summa	24357	*Summa*	2000000

Schol. 2. *Examen* rite peractæ additionis inferius ope *subtractionis* dabimus: methodum autem addendi numeros heterogeneos *reducibiles*, e. g. florenos, grossos, cruciferos, trademus Cap. 5to.

31. *Subtractio numerica* est unius numeri ab altero homogeneo ablatio, ut residuus numerus innotescat. Numerus, a quo alter subtrahitur, vocatur *totum*, vel numerus *minuendus*; is vero, qui subtrahitur, *subtrahendus* audit: denique numerus ille, qui facta subtractione remanet, appellatur *residuum*, vel *differentia*. e. g. Si numerus 5 a numero 9 subtrahi debeat; 9 est *totum*, seu *minuendus*, 5 autem est *subtrahendus*; id denique, quod facta subtractione remanet, nimirum 4 est *residuum*, seu *differentia*.

32. Coroll. Igitur *subtrahendus* nequit esse major *minuendo*; quomodo enim secus posset ab isto auferri? Item: minuendus, & subtrahendus numeri homogenei, vel saltem ad homogeneitatem reducibiles sint, oportet: neque enim possunt e. g. tres urnæ vini a quinque orgyis lignorum subtrahi.

33. PROBLEMA III. *Numeros subtrahere.*

Resolut. 1mo. Subtrahendus numerus scribatur infra minuendum ita, ut unitates respondeant unitatibus, decades decadibus &c. quemadmodum in additione (29) dictum est; tum numeri hi sic collocati linea subducantur, ne confundantur cum *residuo*.

2do.

2*do*. Inchoetur ſubtractio ab unitatibus; tum transeatur ad decades, centenarios, & ſic porro: reſidua autem ſingula ſcribantur ſub linea infra illum numerum, cujus reſidua ſunt: id eſt, reſiduum unitatum ſcribatur infra unitates, decadum infra decades &c.

3*tio*. Si numerus ſubtrahendus æqualis fuerit ſuperiori, aut ſi zerus a zero ſubtrahi debeat; ſcribatur pro reſiduo zerus. Utroque enim hoc caſu reſiduum utile nihilo æquale eſt. Quod ſi autem *minuendus* fuerit numerus ſignificans, *ſubtrahendus* vero fuerit zerus; pro reſiduo ponatur totus numerus minuendus. Cum enim zerus ſecundum ſe nihil ſignificet; a quocunque numero ſubtrahatur zerus, perſpicuum eſt, numerum illum remanſurum totum.

EXEMPLUM *harum Regularum.*

Minuendus	9 4 6 0 7 8
Subtrahendus	7 0 2 0 7 5
Reſiduum	2 4 4 0 0 3

Scilicet ab unitatibus inchoando dico: 5 *ab* 8 *ſubtrahendo remanent* 3; *quem proinde numerum* (per. reg. 2.) *colloco infra lineam ſub unitatibus.* 7 *a* 7 *ſubtrahendo remanet* (per reg. 3.) *zerus, infra decades collocandus. Zerum a zero ſubtrahendo remanet zerus,* (per reg. 3.) *pro reſiduo collocandus.* 2 *a* 6 *ſubtrahendo remanent* 4. *Si zerum a* 4 *ſubtraham, remanet integer numerus* 4, (per reg. 3.) *pro reſiduo habendus. Denique ſi* 7 *a* 9 *ſubtraham, remanent* 2. *Conſequenter totum reſiduum eſt* = 244003.

4*to*. Si nota inferior major a ſuperiore minore, vel a zero veniat ſubtrahenda; ad minorem illum ſuperiorem numerum, vel zerum transferatur, ſeu *concedatur* unitas e nota ſiniſteriore. Hoc pacto minor ille numerus ſuperior, vel zerus decade augebitur: quælibet enim unitas loci proxime ſiniſterioris decuplo plus valet, quam valeat quælibet unitas loci dexterioris (17). Poſt hanc *conceſſionem* poterit jam inferior numerus ſubtrahi a numero ſuperiore, vel zero jam decade aucto. Interim nota illa ſiniſterior, ex qua

uni

unitas translata est, signetur puncto, quod in memoriam revocet, eam notam unitate fuisse mulctatam.

e. g.	Sit *Minuendus*	7. 5. 0
	Subtrahendus	2 6. 4;
	erit *Residuum*	4 8 6.

Sic enim procedendum est: 4 *a zero non possum subtrahere; ergo ex nota sinisteriore* 5 *transfero unitatem* (id est, reapse decadem) *tum ex* 10 *subtrahendo* 4 *remanent* 6: *quem numerum infra unitates scribo. Porro notam* 5 *signavi puncto, quod indicat, eam notam unitate mulctatam esse: hinc* 6 *non jam a* 5, *sed a* 4 *veniunt subtrahenda. Quæ subtractio cum impossibilis sit, rursus ex nota sinisteriore* 7 *transfero unitatem. atque ita numerum* 4 *decade augeo: quo facto* 6 *ex* 14 *subtraho, remanentque* 8. *Denique cum numerus* 7 *unitate mulctatus sit;* 2 *non ex* 7, *sed ex* 6 *subtrahi debent, remanentque* 4. *Hoc est, totum residuum est* = 486.

5*to.* Si in casu nunc expositæ regulæ quartæ sinisterior illa nota, ex qua unitas transferenda esset, zerus fuerit; unitas illa e nota zerum præcedente debebit *concedi:* quo facto zerus ille abibit in numerum 9.
e. g. Sit

Minuendus	4. 0. 2
Subtrahendus	7 6;
erit *Residuum*	3 2 6.

Nempe quoniam 6 a 2 subtrahere nequeo, numerumque 2 præcedit zerus; ex numero 4 transfero unitatem, & dextimum numerum 2 augeo decade, dicoque: 6 *a* 12 *si subtraham, remanent* 6; *quem numerum infra unitates scribo.* Prosequor: si 7 *a* 9 (nam zerus abit in numerum 9) *subtraham, remanent* 2. *Denique quoniam numerus* 4 *unitate mulctatus est*, 3 *depono, acquiroque totum residuum* = 326. Porro zerum, qui transsilitur, debere abire in numerum 9, sic declaro: Unitas illa, qua numerus 4 in assumpto exemplo mulctatur, reapse transfertur ad zerum, adeoque zerus augetur decade, seu abit in numerum 10. Porro ex hoc numero 10, unitas ultra transfertur ad numerum dextimum 2, quæ unitas hunc numerum decade auget. Itaque in loco zeri remanent

manent 9 unitates, & numerus dextimus 2 auctus decade abit in numerum 12. Hinc ea unitatis translatio, seu *concessio* efficit imprimis, ut jam 6 a 12, & 7 a 9 subtrahi debeant; efficit deinde, ut numerus 4 unitate mulctatus in numerum 3 abeat.

6to. Si, dum concedenda est unitas, versus sinistram plures continenter zeri sequantur; omnes transiliendi sunt, dum perveniatur ad numerum significantem: porro singuli zeri, qui transiliuntur, abeunt in numerum 9. e. g.

Sit *Minuendus*	4. 0 0 2
Subtrahendus	7 6;
erit *Residuum*	3 9 2 6.

Dum enim a numero 4 unitas conceditur, reapse idem fit, ac si unitas illa transferretur immediate ad primum zerum, qui dextram versus proxime sequitur; qui proinde zerus decade augetur, adeoque abit in numerum 10. Ab hoc numero 10 tacite ad alterum zerum dexteriorem transfertur unitas: quo pacto in loco prioris zeri remanent 9, & alter zerus abit in numerum 10. Denique ex hoc numero 10, rursus unitas ultra promovetur ad dextimum numerum 2; atque ita in alterius quoque zeri loco nonnisi 9 remanent, & dextimus numerus 2 auctus decade in numerum 12 abit. Hinc in allato exemplo sic procedendum est: *Quoniam 6 a 2 subtrahere nequeo, & post numerum 2 sinistram versus duo zeri sequuntur, hos transiliendo, unitatem ex numero 4, qui idcirco puncto signandus est, concedo. Quo facto zeri abeunt in 9, & ultimus numerus in numerum 12. Itaque 6 a 12 subtrahendo remanent 6; 7 a 9 subtrahendo remanent 2; demum numeri 9 & 3, cum nullus jam supersit numerus subtrahendus, ordine suo infra lineam scribendi sunt, estque totale residuum* = 3926.

34. Demonstratio. Subtractio numerica est unius numeri ab altero homogeneo ablatio, ut residuus munerus innotescat (31): atqui per has regulas singulæ partes numeri subtrahendi, scilicet unitates, decades &c. auferuntur a singulis partibus numeri minuendi, & innotescit singularum partium residuum; uti patet eas regulas expendenti: ergo per has regulas subtractio rite peragitur.

Schol

Schol. 1. En alia adhuc exempla subtractionis.

Minuendus	89643	*Minuendus*	60105
Subtrahendus	64975	*Subtrahendus*	23507
Residuum	24668	*Residuum*	36598
Minuendus	95042	*Minuendus*	900506
Subtrahendus	7658	*Subtrahendus*	192870
Residuum	87384	*Residuum*	707636

Schol. 2. Methodum subtrahendi numeros heterogeneos *reducibiles*; e. g. complexum florenorum, grossorum, cruciferorum ab alio complexo florenorum, grossorum, cruciferorum, Cap. 5to dabimus.

35. AXIOMA. *Totum est aequale omnibus partibus suis simul sumptis.*

36. Coroll. I. Quod si ergo totum quodpiam constet e. g. tribus partibus A, B, C; imprimis sublata sola parte A remanere debet complexum partium B & C: deinde sublatis duabus partibus A & B remanere debet pars C: denique sublatis omnibus partibus A, B, C, ex eo toto prorsus-nihil remaneat, oportet.

37. Coroll. II. Quodpiam totum vocemus A. Si, postquam eo hoc toto A sublata est pars B, remaneat C; residua hæc pars C addita parti subtractæ B debet adæquare totum A, id est, debet esse B + C = A. Secus enim non esset totum æquale omnibus partibus suis simul sumptis.

38. PROBLEMA IV. *Examinare, num rite peracta sit Additio numerica.*

Resolut. Ex summa subtrahe unam *addendorum* seriem; ex residuo hujus subtractionis subtrahe alteram seriem addendorum; rursus ex residuo hujus secundæ subtractionis subtrahe tertiam addendorum seriem, & sic porro: si demum ex summa nihil remanserit, id erit indicium evidens legitimæ additionis. e. g. In exemplo 2dæ Regulæ n. 29, si ex summa 6979 subtrahas primam *addendorum* seriem, quæ est 6402; residuum erit = 577. Si ab hoc residuo subtrahas alteram seriem 554;

resi-

residuum est = 23, seu remanet ipsa tertia addendorum series: qua proinde subtracta nihil amplius remanet ex summa. Evidenti sane argumento rite peractæ additionis.

Demonstratio continetur in *Coroll.* 1. n. 36.

Schol. 1. Non desunt, qui putent, additionem examinari posse hoc modo: numerum 9 vel 7 toties, quoties possunt, abjiciunt tam ex addendis, quam ex summa; & si idem demum residuum maneat in summa, quod in addendis, concludunt legitimam esse additionem e. g. Si in exemplo 2dæ regulæ n. 29 ex addendis abjiciatur numerus 9 toties, quoties abjici potest, demum remanet numerus 4; idem remanet ex summa: unde inferunt, legitimam esse additionem. At hoc examen esse fallax, ac erroneum, facile patet, si vel sola loci permutatio fiat in numeris *summam* constituentibus. Nam sicui per errorem hæc prodivisset summa: 9697; etiam tum facta numeri 9 abjectione demum residuum utrobique esset = 4.

Schol. 2. Præterea circa additionem hæc duo notare juverit. 1) Si nimis longa series occurrat addendarum unitatum, decadum &c. tutius instituetur operatio, si *addendi* numeri ductis lineis transversis in aliquot partes divisi fuerint, & cujuslibet id genus partis additio separatim fiat, tum summæ particulares in unam totalem summam colligantur. 2) Si, dum e. g. unitates in unam summam collectæ fuerunt, additio earundem peracta est sursum eundo per ipsarum seriem; repetatur additio eundo deorsum. e. g. Si in exemplo reg. 3tiæ n. 29. unitates hoc modo collegisti: 2 *&* 6 *sunt* 8, *additis* 5 *sunt* 13; repete operationem descendendo hoc modo: 5 *&* 6 *sunt* 11, *additis* 2 *sunt* 13. Si enim summæ duplici hac operatione acquisitæ congruant, valde probabile est, non esse commissum errorem in additione.

39. PROBLEMA V. *Examinare, num rite peracta sit subtractio numerica.*

Resolut. *Residuum* subtractionis adde numero *subtrahendo*: si *summa* fuerit æqualis numero *minuendo*, id erit signum evidens rite peractæ subtractionis.

e. g. In exemplo regulæ 4tæ n. 33. si *residuum* 486 addas subtrahendo 264; summa erit = 750. Quæ cum æqualis sit *minuendo*, legitimam fuisse subtractionem evincit.

Demonstratio clare continetur in *Coroll.* 2. *n.* 37.

40. Coroll. Igitur *examen* additionis per subtractionem; subtractionis vero per additionem obtinetur.

CAPUT TERTIUM.

De Multiplicatione numerica.

41. *Multiplicatio numerica* est unius numeri toties ad se ipsum facta additio, quot alter numerus, per quem ille multiplicari dicitur, unitates in se continet. e. g. 4 multiplicare per 2, est numerum 4 bis sumere. Numerus, qui multiplicatur, *multiplicandus;* alter vero ille, per quem *multiplicandus* multiplicatur, *multiplicator* dicitur. Summa ex multiplicatione resultans solet *factum*, vel *productum* nuncupari. Multiplicator, & multiplicandus vocantur etiam *factores*. Denique numerus, qui multiplicatur per alterum, dicitur *duci* in alterum illum; ut adeo e. g. 3 *ducere in* 4 tantundem sit, ac 3 *multiplicare per* 4.

42. Coroll. Igitur in *facto* toties continetur *multiplicandus*, quoties unitas in *multiplicatore*. e. g. Si 4 multiplicentur per 3; in *facto* 12, *multiplicandus* 4 debet ter contineri. Quippe *factum* nihil aliud est, quam totalis illa summa, quæ enascitur ex *multiplicandi* toties ad se ipsum facta additione, quot unitates *multiplicator* continet (41).

43. THEOREMA I. *Sint quicunque duo factores: idem factum prodit, sive primus ducatur in secundum, sive secundus in primum.*

Demonst. Resolvantur *factores* e. g. 3. & 4. in suas unitates, & eo ordine collocentur, quem exhibet figura hæc:

A

	A	4		B
	1	1	1	1
3	1	1	1	1
	1	1	1	1
	C			D

Jam ducere numerum 3 in 4 idem eſt, ac unitatum ſeriem A C quater ſumere, & 4 in 3 ducere idem eſt, ac unitatum ſeriem A B ter ſumere (41): atqui utroque in caſu idem numerus unitatum acquiritur, is ſcilicet, qui ſpatio A B D C continetur, eſtque = 12: ergo idem eſt *factum*, ſive 3 in 4, ſive 4 in 3 ducas. Idem eodem modo de quibuscunque aliis duobus factoribus demonſtrari poteſt.

44. Coroll. Igitur perinde eſt, uterlibet factor ſit *multiplicandus*, aut *multiplicator*. Hinc, quoniam ſemper *multiplicandus* toties continetur in *facto*, quoties unitas in *multiplicatore* (42); generatim *factor* quilibet toties continetur in *facto*, quoties unitas in *factore* altero.

45. Quoniam in actuali multiplicatione, neceſſaria eſt promptitudo inveniendi facta particularia numerorum ſimplicium, e. g. quot ſint ſepties novem, aut octies octo, eaque promptitudine Tirones carere ſolent; iis vel addiſcenda eſt *Regula Pigri*, quæ hoc loco oretenus doceri poterit, quamve nos in Algebra exponemus, vel in promptu habenda *Tabula Pythagorica*, quam iſthic adjecimus.

D

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	B
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
F	7	14	21	28	35	42	49	56	63	G
	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
C	9	18	27	36	45	54	63	72	81	

E

Ope hujus tabellæ factum quorumvis duorum numerorum simplicium hoc modo invenitur. Sit e. g. numerus 8 multiplicandus per 7. Quæratur in ſerie AB numerus 8, & in ſerie AC numerus 7, aut contra; tum a numero 8 procedatur per ſeriem DE, & a numero 7 per ſeriem FG, usque dum perveniatur ad quadratulum, in quo concurrunt duæ illæ ſeries: numerus 56 illi quadratulo inſertus eſt factum quæſitum. Eodem modo invenitur, octies novem eſſe = 72, novies novem = 81 &c.

46. PROBLEMA VI. *Numeros quosvis multiplicare.*

Resolut. Casus I. *Si multiplicator nonniſi unica nota numerica conſtet.* 1mo. Scribatur numerus multiplicandus, & infra ejus dextimam notam ſcribatur multiplicator: tum ſubducantur linea.

2do. A dextris inchoando multiplicentur per *multiplicatorem* omnes notæ *multiplicandi*, id eſt, imprimis unitates, deinde decades, tum centenarii &c. *Facta* autem particularia ſcribantur infra lineam, ita ut facta unitatum unitatibus reſpondeant, decadum decadibus &c.

3tio. Si quodpiam particulare factum excreſcat ultra 9, adeoque ſi excreſcat in ejusmodi numerum, qui duabus notis exprimendus foret; nonniſi dextima nota ſcribatur (uti in *additione n.* 29. *reg.* 3tia dictum eſt) altera vero ſiniſtima retineatur mente, ac deinde addatur novo facto, orto ex multiplicatione notæ ſequentis. e. g.

Sit	*Multiplicandus*	9 0 6 7 2
	Multiplicator	— — — 4
erit	*Factum*	— — 3 6 2 6 8 8.

Scilicet a dextris inchoando dico: *quater* 2 *ſunt* 8; *quod particulare factum ſcribo infra unitates. Quater* 7 *ſunt* 28; *numerum* 8 *ſcribo infra decades, alterum* 2 (per reg. 3.) *mente retineo. Quater* 6 *ſunt* 24, *additis* 2, *quæ mente retinui, ſunt* 26; 6 *depono,* 2 *iterum mente retineo. Quater zerus eſt denique zerus, additis* 2 *mente retentis ſunt* 2, *quæ depono. Quater* 9 *ſunt* 36, *cujus numeri*

numeri utramque notam (cum jam finis sit multiplicationis) depono. Atque ita acquiro factum totale = 362688.

Casus II. *Si multiplicator constet duabus, vel pluribus notis.* 1*mo.* Multiplicator subscribatur multiplicando ea lege, qua subscribendus esset, si eidem multiplicando *addi* deberet (29), ac proinde ita, ut unitates multiplicatoris unitatibus multiplicandi, decades decadibus &c. respondeant; tum subducantur linea.

2*do.* Per unitates multiplicatoris multiplicetur totus multiplicandus, ut in Casu I. Tum per decades multiplicatoris rursus eodem modo multiplicetur totus multiplicandus; hoc solum notato, quod alterum hoc particulare factum ita debeat scribi, ut ejus dextima nota non jam unitatibus, sed decadibus multiplicatoris respondeat. Pariter, si multiplicator tribus, aut pluribus notis constiterit, etiam per centenarios, millenarios &c. multiplicatoris multiplicetur successive totus multiplicandus: ita tamen, ut semper dextima facti particularis nota sub ea multiplicatoris nota scribatur, per quam fit multiplicatio; uti in subjecto exemplo videre est.

3*tio.* Peracta multiplicatione addantur facta partialia in unam summam: atque summa hæc erit ipsum totale factum.

e. g. Sit *Multiplicandus*		4502
Multiplicator		253
Erunt *facta partialia*		13506
		22510
		9004
& *factum totale*	=	1139006.

Scilicet per 3 multiplicando totum multiplicandum, acquiritur primum factum partiale 13506; quod ita scribitur infra lineam, ut ejus dextima nota 6 respondeat unitatibus multiplicatoris. Deinde per 5 multiplicando totum multiplicandum, acquiritur alterum factum partiale 22510, ita scribendum, ut ejus dextima nota 0 respondeat decadibus multiplicatoris. Denique per 2 multiplicando totum multiplicandum, ac-

 qui-

quiritur tertium factum partiale 9004; quod ita scribi debet, ut ejus ultima nota 4 respondeat centenariis multiplicatoris. Hæc omnia facta partialia in unam summam collecta dant *factum totale* 1139006.

47. Demonstrat. *Multiplicatio numerica* est unius numeri (id est, *Multiplicandi*) toties ad se ipsum facta additio, quot alter numerus (scilicet *Multiplicator*) unitatea in se continet (41); ergo si in *facto totali* per has regulas acquisito toties continetur totus multiplicandus, quot unitates continentur in toto multiplicatore, per regulas has rite peragitur multiplicatio: atqui in facto totali per has regulas acquisito toties continetur totus multiplicandus, quot unitates continentur in toto multiplicatore; quod sic ostendo. Contemplemur exemplum multiplicationis paullo superius allatum, in quo multiplicator est 253. In multiplicatore hoc sunt unitates 200 + 50 + 3. Jam evidens imprimis est, in primo partiali facto 13506 ter contineri totum multiplicandum. Istud enim factum acquiritur, ter sibi addendo tam unitates, quam etiam decades, centenarios &c. multiplicandi.

Deinde dum totum multiplicandum per 5 multiplicando, acquiritur alterum factum partiale 22510; pariter evidens est, in altero hoc partiali facto seorsim considerato quinquies contineri totum multiplicandum. Quod si ergo eidem facto concipiamus addi a dextris zerum, ut fiat = 225100; id factum quinquagesies continebit totum multiplicandum: ea enim adjectione quælibet ejus facti nota ad sequentem versus sinistram locum retruditur, ac proinde cujuslibet notæ valor in decuplum augetur (18). Jam vero dum partiale illud factum ita scribitur, ut prima ejus nota decadibus multiplicatoris respondeat; idem sane est, ac si zerus ipsi adderetur a dextris, eo scilicet loco, qui vacuus relinquitur: ergo alterum factum partiale, eo, quo regula exigit, modo scriptum quinquagesies continet totum multiplicandum.

Denique dum totum multiplicandum per 2 multiplicando, acquiritur tertium factum partiale 9004; in facto hoc seorsim considerato bis continetur totus multiplicandus. Concipiamus ei facto zerum unum a dex-

dextris addi, ut fiat = 90040; ejus valor in decuplum augebitur, ac proinde jam vigesies continebit totum multiplicandum: si novum ei zerum addamus, ut fiat = 900400; rursus in decuplum augebitur ejus valor, ita ut jam 200 vicibus contineat totum multiplicandum. Atqui, dum partiale illud factum ita scribitur, ut prima ejus nota centenariis multiplicatoris respondeat; idem sane fit, ac si duo zeri adderentur ipsi a dextris, iis scilicet locis, qui vacui relinquuntur: ergo tertium factum partiale, eo, quo regula exigit, modo scriptum 200, vicibus continet totum multiplicandum.

Itaque omnia tria facta partialia in unam summam collecta, 253 vicibus continent totum multiplicandum. Hoc est, factum totale tot vicibus continet totum multiplicandum, quot unitates continentur in toto multiplicatore: consequenter multiplicatio per regulas superius allatas rite peragitur.

48. Coroll. I. Si in intermedio multiplicatoris loco unus, aut plures zeri occurrant, ut si e. g. multiplicator esset numerus 2003; compendio locus est. Scilicet omissis his zeris per solas significantes multiplicatoris notas multiplicetur totus multiplicandus; hoc uno notato, quod in describendis partialibus factis servandus sit ordo, in 2da *Casus 2di* regula generatim præscriptus (46).

e. g. Sit *Multiplicandus*		3 1 2 2
Multiplicator		2 0 0 3;
erunt *facta partialia*	[	9 3 6 6
	[	6 2 4 4
adeoque *factum totale* erit	=	6 2 5 3 3 6 6.

Ratio compendii est. Nam si multiplicandus etiam per intermedios illos multiplicatoris zeros multiplicatus fuisset; hæc quatuor partialia facta fuissent acquisita:

```
      9 3 6 6
    0 0 0 0
  0 0 0 0
6 2 4 4;
```

quæ quatuor partialia facta in unam summam collecta non aliud factum totale dedissent utique, quam quod superius compendio usi acquisivimus, scilicet = 6253366.

49. Coroll. II. Quod si autem in fine unius *factoris*, vel utriusque simul, occurrant zeri quotcunque; sufficiet multiplicationem instituere per reliquas notas, finalibus illis zeris interea neglectis, & deinde in fine facti totalis addere tot zeros, quot erant neglecti illi finales.

e. g. Sit *Multiplicandus* 1 2 0
Multiplicator 3 0 0;

sufficit multiplicare 12 per 3, & facto, quod erit = 36, addere in fine tres illos zeros, quorum unus est in fine multiplicandi, alii duo autem in fine multiplicatoris: quo facto erit factum totale = 36000. Si enim quis hoc compendio uti nolens, per singulas multiplicatoris notas totum multiplicandum multiplicare vellet; hæc tria particularia facta acquireret:

```
  0 0 0
 0 0 0
3 6 0;
```

quorum summa totalis eadem est, quam superius compendio usi acquisivimus, scilicet = 36000.

EXEMPLA MULTIPLICATIONIS.

Multiplicandus	6785	*Multiplicandus*	8709
Multiplicator	897	*Multiplicator*	796
Fact. tot.	6086145.	*Fact. tot.*	6932364
Multiplicandus	6948	*Multiplicandus*	9500
Multiplicator	7005	*Multiplicator*	6700
Fact. tot.	48670740	*Fact. tot.*	63650000

Schol. Examen rite peractæ multiplicationis fit ope divisionis, uti *Cap. sequente* ostendemus

CAPUT

CAPUT QUARTUM.
De Divisione Numerica.

50. *Divisio numerica* est operatio arithmetica, qua ex datis duobus numeris eruitur tertius, qui indicat, quoties unus datorum numerorum in altero contineatur. e. g. Dum 12 per 3 dividuntur, reapse inquiritur in tertium numerum 4, qui indicet, quoties 3 in 12 contineantur. Numerus, qui dividitur, *dividendus*; alter vero ille, per quem dividendus dividitur, *divisor* dicitur. Denique tertius ille numerus, in quem hac operatione inquiritur, seu qui indicat, quoties divisor in dividendo contineatur, *quotus*, vel *quotiens* audit. Sic in allato exemplo *dividendus* est 12, *divisor* 3, *quotus* 4.

51. Coroll. Cum quotus indicet, quoties divisor contineatur in dividendo; perspicuum est, divisorem toties contineri in dividendo, quot unitates continentur in quoto. e. g. Divisorem 3 quater contineri in *dividendo* 12, tantundem significat, ac: 3 in 12 toties contineri, quot unitates in quoto 4 reperiuntur.

52. PROBLEMA VII. *Dividere numeros, si divisor unica duntaxat nota constet.*

Resolut. *1mo.* Scribatur numerus dividendus intra parenthesim, & divisor ad ejus sinistram collocetur.

2do. Operatio non jam a dextris, ut in præcedentibus operationibus, sed a sinistris inchoetur, quæraturque, quoties contineatur divisor in prima, seu sinistima dividendi nota, vel si hæc divisore minor est, in duabus primis dividendi notis: quas quidem dividendi notas vitandæ confusionis gratia a reliquis *commate* separare oportet. Deinde quotus scribatur post parenthesim ad dextram dividendi. Porro idem quotus ducatur in divisorem, & *factum* subscribatur iis dividendi notis, quæ dividebantur, subtrahaturque ab iisdem. Denique, si quid ex hac subtractione remaneat, ducta

 trans-

transversa linea subscribatur. Atque hæc est prima pars operationis, quam juvat illico videre in exemplo.

Sit *Divisor*, *Dividendus*, *Prima quoti nota.*

$$\begin{array}{lcr} 2 & (13,\ 52) & 6 \\ & \underline{12} & \\ & -1 & \end{array}$$

Scilicet *dividendo* parenthesi incluso, collocatoque ad ejus sinistram divisore, accipiantur duæ sinistimæ dividendi notæ 13 (nam solam primam, utpote divisore minorem accipere non sufficit) & a ceteris *commate* secernantur; tum quæratur, quoties divisor 2 contineatur in 13. Quoniam 2 in 13. continetur sexies, numerus 6 scribatur pro *quoto* ad dextram dividendi; tum idem quotus 6 ducatur in divisorem 2, & factum = 12 scribatur infra eas dividendi notas, quæ dividebantur, seu infra 13, idque ea lege, quam *subtractio* exigit. Denique subducatur linea, & 12 subtrahantur a 13, ac *residuum* = 1 infra lineam scribatur.

3*tio*. Altera operationis pars est hæc: Ejusmodi residuo ad dextram jungatur sequens dividendi nota, pariter *commate* secernenda a reliquis; si autem in subtractione prioris operationis nihil remansit, sola ponatur sequens dividendi nota infra lineam. Tum inquiratur rursus, quoties contineatur divisor in his notis, quæ infra lineam scriptæ sunt, & novus quotus scribatur ad dextram prioris quoti. Porro novus quotus ducatur in divisorem, ut ante, & factum subscribatur iis notis, quæ nunc dividebantur, subtrahaturque ab iisdem. Denique, si quid ex hac subtractione remaneat, ducta altera linea, subscribatur. En continuationem operationis in assumpto exemplo.

Divisor, *Dividendus*, *Duæ priores quoti notæ*.

$$\begin{array}{lcr} 2 & (13,\ 5,\ 2) & 67 \\ & \underline{12} & \\ & -15 & \\ & \underline{14} & \\ & -1 & \end{array}$$

Sci-

Scilicet *residuo* = 1 infra primam lineam ſcripto addatur ad dextram ſequens dividendi nota 5; hæcque ſecernatur *commate*, ut ſciatur, quam procul ſit proceſſum in diviſione. Deinde quæratur, quoties diviſor 2 contineatur in 15; & novus quotus 7 adjungatur priori quoto ad dextram. Porro novus quotus 7 ducatur in diviſorem 2, & factum 14 ſubſcribatur notis modo diviſis, ſeu notis 15. Denique ducta altera linea, 14 ſubtrahantur a 15, & novum reſiduum = 1 infra lineam illam alteram ſcribatur.

4*to*. Si adhuc una, vel plures dividendi notæ nondum diviſæ ſuperfuerint; reſiduo infra 2dam lineam ſcripto pariter addatur nova dividendi nota, & prorſus eadem operandi ratione, quam nunc in præcedente regula 3tia deſcripſimus, eruatur tertius quotus, ad dextram priorum locandus, tum quartus &c. usque dum omnes dividendi notæ dividantur. En ulteriorem in aſſumpto exemplo operationis continuationem, & ſimul etiam ſchema totius jam operationis.

Diviſor, *Dividendus*, *Quotus integer.*

```
2  (1 3, 5, 2,)  676
    1 2
    ----
    - 1 5
      1 4
      ----
      1 2
      1 2
      ----
      0 0
```

Nempe ulterior operationis continuatio hoc modo procedit: Reſiduo = 1, infra ſecundam lineam ſcripto additur ultima dividendi nota 2; tum quæritur, quoties diviſor 2 contineatur in 12. Novus quotus 6 ſcribitur ad dextram priorum, idemque quotus ducitur in diviſorem 2, & factum 12 ſcribitur infra notas nunc diviſas, ſeu infra 12. Porro ſubtrahuntur 12 a 12; ex qua ſubtractione nullum remanet reſiduum. Peracta ergo eſt etiam ultimæ dividendi notæ diviſio; ac proinde finita eſt operatio, acquiſito quoto integro = 676.

5*to*.

5*to*. Si accidat, ut facta ſubtractione nullum remaneat reſiduum pro ulteriore operatione, & præterea ſequens dividendi nota, quæ deponitur, minor ſit diviſore; ſcribatur pro quoto zerus, ac ex dividendo adhuc una nota deponatur, atque ita juxta præcedentes regulas continuetur operatio. Regulam hanc mox exemplo illuſtrabimus.

6*to*. Si quid ex ultima ſubtractione remanet, ſcribatur per modum *fractionis*; id eſt, ad dextram quoti partem ducatur lineola transverſa, ſupra quam ſcribatur numerus *reſiduus*, infra eandem autem ſcribatur *diviſor*.

EXEMPLUM *Regulæ* 5*tæ*, & *ſimul* 6*tæ*.

Diviſor,	*Dividendus*,	*Quotus*.
2	(8, 1, 3,)	$406\frac{1}{2}$
	8	
	— 13	
	12	
	— 1	

Scilicet ſolam primam dividendi notam 8 aſſumo, cum hæc non ſit diviſore minor, & quæro, quoties contineantur 2 in 8; tum quotum 4 ad dividendi dextram colloco, poſtea in diviſorem 2 duco, factumque 8 ſubſcribo notæ diviſæ 8, ac ab eadem ſubtraho. Facta ſubtractione nullum manet reſiduum pro altera operationis parte. Itaque ſequentem dividendi notam 1 infra lineam prius ducendam depono. Quia vero diviſor 2 in 1 ne ſemel quidem continetur, per *reg.* 5*tam* pro quoto zerum ſcribo, tum adhuc unam dividendi notam, id eſt, ſequentem notam 3 adjicio, & quæro, 2 in 13 quoties contineantur. Quotum 6 reliquis quoti notis addo, poſtea in diviſorem duco, factumque 12 ſubtraho a 13. Facta ſubtractione habeo reſiduum = 1; quod poſt quotum per modum fractionis ſcribo, ſubſcripto ipſi diviſore. Itaque pro quoto acquiro 406, & præterea 1 in 2 partes dividendum.

53. Demonstratio. Diviſio numerica eſt operatio, qua invenitur *quotus*, qui indicet, quoties diviſor con-

contineatur in toto dividendo (50): atqui ex ipsa operatione juxta has regulas instituta liquet, *quotum* inventum indicare, quoties divisor contineatur in singulis dividendi millenariis, centenariis, decadibus, & unitatibus, ac proinde quoties contineatur in toto dividendo; per has ergo regulas divisio rite peragitur.

EXEMPLA *alia præced. Regularum.*

	Divisor,	*Dividendus,*	*Quotus.*
I.	4	(956)	239.
II.	9	(6381)	709.
III	7	(6863)	980$\frac{3}{7}$.

54. PROBLEMA VIII. *Dividere numeros, si divisor duabus, aut pluribus notis constet.*

Resolut. 1*mo.* Observata eadem scribendi lege, quam in præc. Probl. secuti sumus, *commate* separentur a ceteris tot sinistimæ notæ dividendi, quot necessariæ fuerint ad efficiendum numerum toto divisore non minorem, e. g. Sit divisor 34. Si primæ duæ sinistimæ dividendi notæ fuerint e. g. 40; has duas notas a ceteris *commate* separare sufficiet: numerus enim 40 non est minor toto divisore 34. At si primæ duæ sinistimæ dividendi notæ fuerint e. g. 29, vel 43; quoniam uterque hic numerus minor est toto divisore 34, in neutro casu sufficiet duas notas separare *commate*, sed tres erunt separandæ.

2*do.* Inquiratur deinde, quoties prima divisoris nota contineatur in prima dividendi nota, aut (si hæc minor sit, quam prima divisoris nota) in duabus primis dividendi notis; & quotus in totum divisorem ductus subtrahatur a sinistimis illis dividendi notis, quæ *commate* sunt a reliquis separatæ. Si factum hoc subtrahi inde nequeat; id indicio est, quotum justo majorem esse, ac proinde imminuendum. Aque istud perfrequenter evenit, si id unice attendatur, quotiesnam prima divisoris nota contineatur in prima, vel in duabus primis dividendi notis: quare, ne quotus justo major fu-

fumatur, fimul attendi debet, an etiam reliquæ divifori notæ in fequentibus dividendi notis, *commate* feparatis, totidem vicibus contineantur. Quod fi autem facta fubtractione refiduum fuerit divifore majus; id argumento erit, quotum jufto minorem effe, ac proinde augendum. Denique quotus pro jufto habendus erit, fi is in totum diviforem ductus det factum vel æquale, vel proxime minus notis dividendi.

3*tio*. Poftquam juftus quotus inventus eft, fcribatur is poft parenthefim a dextris dividendi, ut in præc. Probl. dictum eft; tum factum, quod ex eo quoto in totum diviforem ducto enafcitur, ducta linea transverfa, fcribatur infra dividendi notas *commate* feparatas, ita ut ab iisdem fubtrahi poffit. Peracta fubtractione, refiduo (fi quod remanfit) ad dextram jungatur fequens dividendi nota, pariter *commate* fecernenda a reliquis; tum inquiratur rurfus, quoties contineatur divifor in his notis, quæ infra lineam fcriptæ funt: quæ quidem inquifitio eodem modo fiat, quem Regula 2da nunc pertractata præfcribit. Si quid ex ultima fubtractione remaneat, jungatur ad dexteram quoti, eique interjecta lineola divifor fubfcribatur: id eft, inftar *fractionis* fcribatur, ut in 6ta præc. Probl. regula dictum eft.

4*to*. Si refiduum quoddam cum adjuncta nota dividendi minus fuerit divifore; fcribatur pro quoto zerus, & ex dividendo nota fequens iterum deponatur: fi adhuc divifor major fuerit, rurfus fcribatur zerus pro quoto, & ex dividendo nota fequens denuo deponatur; idque tamdiu repetatur, dum refiduum fic auctum dividi demum poffit per diviforem. In reliquis fervetur confueta operandi methodus, quam nempe regulæ præcedentis Problematis (52) continent.

Demonstratio eft eadem, quæ Problematis præcedentis (53).

EXEM-

EXEMPLUM *harum Regularum.*

Divisor,	*Dividendus*,	*Quotus.*
15	(121, 2, 0, 6, 0,)	80804

```
   120
   ---
   - - 120
       120
   -------
   - - - - 60.
           60
   ----------
           00.
```

Scilicet, quoniam duæ primæ dividendi notæ 12, minorem efficiunt numerum divisore, per reg. 1mam tres primæ dividendi notæ sunt *commate* separandæ, inquirendumque methodo regulæ 2dæ, quoties divisor 15 contineatur in 121. Justus divisor erit 8, qui ductus in totum divisorem dat factum = 120. Factum hoc dividendi notis commate separatis subscribatur, & ab iisdem subtrahatur; tum residuo = 1 infra lineam transversam scripto addatur sequens dividendi nota 2. At quoniam in 12 divisor 15 ne semel quidem continetur, per reg. 4tam scribatur pro quoto zerus, & ex dividendo sequens nota 0 deponatur, quæraturque, quoties 15 contineantur in 120. Novus quotus 8 adjungatur reliquis, & ejus in divisorem ducti factum = 120 subscribatur iis dividendi notis, quæ nunc dividebantur, seu notis 120. Facta subtractione nullum manet residuum pro ulteriori operatione: quapropter deponatur sequens dividendi nota 6; quæ cum minor sit divisore, pro quoto scribatur zerus, & nova dividendi nota 0 adjiciatur. Porro quæratur, quoties 15 contineantur in 60, & quotus 4 reliquis adscribatur; cujus in divisorem ducti factum = 60 subscribatur iis dividendi notis, quæ nunc dividebantur. Facta subtractione nullum manet residuum; & quia omnes jam *dividendi* notæ sensim depositæ sunt, tota divisio peracta est, acquisitusque quotus = 80804.

EXEM-

EXEMPLA DIVISIONIS.

	Divisor,	*Dividendus*,	*Quotus*.
I.	12	(2 5 6 8)	2 1 4.
II.	25	(1 2 5 1 1 0)	$5004\frac{10}{25}$.
III.	89	(8 7 0 9 5 4)	9 7 8 6.

Schol. 1. Si divisor habeat in fine unum, aut plures zeros; compendio locus est in divisione. Scilicet finales illi zeri resecentur à divisore. & per reliquas divisoris notas dividatur totus dividendus: at finita hac divisione in quoto totidem notæ ultimæ resecentur, quot zeri resecti erant in divisore, scribanturque pro numeratore fractionis, cujus denominator sit unitas cum iis zeris, qui principio ex divisore resecti fuere. Scilicet si unicus zerus resectus fuit a divisore, in quoto dicto nonnisi unitatum nota resecanda erit: at si a divisore duo fuerint resecti zeri; jam in quoto dicto non modo unitatum, verum etiam decadum nota resecari, ac pro fractionis numeratore scribi debebit, & sic porro.

e. g. Sit *dividendus* 1284, *divisor* 400. Resectis ex divisore duobus zeris, dividatur totus dividendus per residuam divisoris notam significantem 4: quotus erit $= 321$. At ex hoc quoto duæ postremæ notæ 21 scribantur pro numeratore fractionis, cujus numerator sit 100: quo facto jam obtinetur quotus quæsitus $= 3\frac{21}{100}$.

Ratio compendii est. Cum enim sit $400 = 4 \times 100$; idem est, sive numerus 1284 dividatur per 400, sive numerus ille dividatur primum per 4, deinde vero quotus enascens porro dividatur per 100. Sic etiam idem est, e. g. sive 24 dividas per 6, sive divisore 6 in duos factores 2 & 3 resoluto, dividas imprimis 24 per 2, tum quotum enascentem 12 porro per 3 dividas. Jam vero in assumpto exemplo, dum dicto compendio uteris, re ipsa numerum 1284 per 4 dividis, deinde vero enascentem quotum 321 porro dividis per 100: ergo eo compendio utendo, numerum 1284 reapse per 400 dividis. Demonstratio hæc cuilibet alteri particulari casui

casui facile applicari potest; modo notetur, eo casu, quo prima divisio quotum cum fractione adjuncta dat, fractionem adjunctam in resectione notarum cum dextima integrarum unitatum nota pro unica nota habendam esse. e. g. Si numerus 1285 per 400 hac methodo dividi debeat; quotus est $= 3\frac{21\frac{1}{4}}{100}$.

Schol. 1. Si divisor in fine zeros habeat; hoc quoque compendii genere uti licet. Nimirum resectis finalibus divisoris zeris, resecentur a dextris dividendi totidem notæ, quot zeri e divisore resecti fuere, & divisio cum reliquis dividendi, & divisoris notis peragatur. Hac peracta, residuo ultimo, si quod mansit, jungantur a dextris notæ resectæ dividendi, & interposita lineola divisor totus subscribatur. Si autem nullum mansit residuum, nonnisi resectis e dividendo notis divisor totus est subscribendus. e. g. Sit dividendus 1384, divisor 400: resectis e divisore duobus zeris, & e dividendo totidem notis dextimis, dividantur 13 per 4; erit quotus $= 3$, manebitque residuum $= 1$. Huic ergo residuo jungantur resectæ dividendi notæ 84, ut sit 184, interjectaque lineola divisor 400 subscribatur: erit quotus quæsitus $= 3\frac{184}{400}$. Si autem 1284 debeat per 400 dividi; ex prima divisione nullum remanet residuum: adeoque solæ resectæ dividendi notæ debent pro fractionis numeratore scribi, estque quotus $= 3\frac{84}{400}$.

Schol. 2. Si vero tam in fine divisoris, quam etiam dividendi adfuerint zeri; adhuc facilius est compendium. Scilicet resecentur ex divisore totidem zeri, quot ex dividendo, & cum reliquis notis consueta operatio instituatur: idem prodibit quotus, qui prodiret, si compendio non utereris. e. g. Sit *divisor* 400, *dividendus* autem 12000. Resecentur ex utroque zeri duo, dividanturque 120 per 4: quotus erit 30; scilicet ille idem, qui acquiritur, si absque hoc compendio 12000 per 400 dividantur.

55. THEOREMA II. *In legitima multiplicatione, si factum dividatur per unum factorem e. g. per multi-*

 pil-

plicatorem, pro quoto debet prodire alter factor e.g multiplicandus. In legitima autem divisione, si divisor ducatur in quotum, factum inde enascens æquale esse debet numero dividendo.

Demonstr. *1mæ partis.* Si legitima est multiplicatio, generatim *factor* unus toties continetur in *facto*, quoties unitas in *factore* altero (44): ergo si *factum* dividatur per unum *factorem*, alter *factor* pro quoto obveniat, est necesse (51).

Demonstr. *2dæ partis.* Divisor toties continetur in dividendo, quot unitates continentur in quoto (51): quod si ergo divisor toties accipiatur, quot unitates sunt in quoto, id est, si divisor in quotum ducatur, factum inde proveniens æquale esse debet dividendo (35).

56. Coroll. Igitur *examen* rite peractæ multiplicationis fit per divisionem; *examen* vero rite peractæ divisionis per multiplicationem. Nempe imprimis quod ad multiplicationem attinet: divide factum per unum factorum e. g. per multiplicatorem: si pro quoto acquisiveris factorem alterum e. g. multiplicandum, id argumento erit, rite peractum fuisse multiplicationem. Quod autem attinet ad divisionem: si divisor in quotum ductus det factum æquale dividendo, legitima fuit divisio.

CAPUT QUINTUM.

De Reductione numerorum mixtorum Heterogeneorum reducibilium; item de eorundem Additione, Subtractione, Multiplicatione, & Divisione.

57. Volenti numeros heterogeneos reducere, addere, subtrahere &c. necessarium est scire, quotnam unitates speciei minoris requirantur ad efficiendam unitatem speciei majoris. Quare aliquot tabulas specierum apud nos in frequentiore usu positarum prævie adferre lubet.

TABU-

TABULA I.

Menſurarum vulgarium, ſeu civilium longitudinis.

1 Hexapeda eſt	=	6 pedibus
1 Pes	=	12 digitis
1 Digitus	=	12 lineis.

TABULA II.

Ponderum Civilium, ſeu Mercatorum Noſtratium.

1 Centenarius eſt	=	100 libris
1 Libra	=	32 Semunc.
1 Semuncia, ſeu *Loth*	=	4 drachmis, ſeu *Quintl.*

TABULA III.

Ponderum Apothecariorum Noſtratium.

1 Libra Apothec. eſt	=	12 unciis
1 Uncia	=	8 drachmis
1 Drachma	=	3 ſcrupulis
1 Scrupulus	=	20 granis.

TABULA IV.

Temporis vulgaris.

1 Dies eſt	=	24 horis
1 Hora	=	60 minutis primis
1 Minutum primum	=	60 minutis ſecundis
1 Minutum ſecundum	=	60 minutis tertiis.

TABULA V.

Valoris pecuniæ in Hungaria.

1 Florenus Germ eſt	=	20 groſſis
1 Groſſus	=	3 cruciferis
1 Crucifer	=	$1\frac{2}{3}$ nummis.

TABULA VI.

Menſurarum arcuum circuli.

Circulus integer eſt	=	360 gradibus
1 Gradus	=	60 minutis primis
1 Minut. primum	=	60 ſecundis
1 Minut. ſecundum	=	60 tertiis.

TABULA VII.

Menſurarum Geographicarum.

1 Milliare German. eſt	=	4 milliar. Italicis
1 Milliare Italic.	=	8 ſtadiis
1 Stadium	=	125 paſſibus
1 Paſſus	=	5 pedibus.

58. PROBLEMA IX. *Quemcunque numerum mixtum heterogeneum reducere ad datam ſpeciem minorem, ſeu inferiorem.*

Resolut. Multiplicetur ſpecies major per eum ſpeciei minoris numerum, qui numerus adæquat unitatem ſpeciei majoris, ſeu ſuperioris. e. g. Sint 20 milliaria Germanica reducenda ad milliaria Italica. Quoniam juxta Tab. VII. (57) 4 milliaria Italica æquivalent uni milliari Germanico, multiplicentur 20 per 4; & factum 80 exprimet 20 milliaria Germanica reducta ad milliaria Italica.

59. Si ſpecies major reducenda ſit ad ſpeciem minorem non proxime ſequentem, ſed remotiorem, ita ut inter eam ſpeciem, quæ reducenda eſt, & eam, ad quam

quam illa reducenda eſt, una vel plures aliæ ſpecies intermediæ intercedant, ut ſi e. g. 100 dies eſſent ad minuta ſecunda reducendi; gradatim hoc modo procedendum eſt: data ſpecies major reducatur imprimis ad minorem ſpeciem proxime ſequentem; deinde factum ex hac reductione enaſcens ad aliam minorem ſpeciem proxime ſequentem reducatur, & ſic porro gradatim, usque dum ad eam ipſam ſpeciem perveniatur, ad quam ut ſpecies major reducatur, exigebatur. Sic in allato exemplo 100 dies reducendi ſunt imprimis ad horas: nempe quoniam unus dies eſt = 24 horis, 100 multiplicari debent per 24; factumque ex hac multiplicatione enaſcens, id eſt, 2400 indicabit numerum horarum, quibus 100 dies æquivalent. Deinde is horarum numerus reducatur ad minuta prima: nempe quoniam quælibet hora continet in ſe 60 minuta prima, 2400 multiplicentur per 60, factumque 144000 exhibebit minuta prima, quibus 100 dies æquivalent. Denique is minutorum primorum numerus reducatur ad minuta ſecunda, id eſt 144000 multiplicentur per 60: factum enaſcens 8640000 exhibebit demum 100 dies ad minuta ſecunda reductos. Quod ſi tamen notus eſſet is datæ ſpeciei minoris numerus, cujus unitates adæquant unitatem datæ ſpeciei majoris; non eſſet neceſſe dicto modo gradatim procedere. e. g. Sint 5 floreni germ. reducendi ad cruciferos. Tametſi inter florenos, & cruciferos intercedat intermedia ſpecies groſſorum; quia tamen communiter notum eſt, florenum æquivalere 60 cruciferis, non erit neceſſe florenos primo ad groſſos, deinde ad cruciferos reducere, ſed illico poterunt 5 illi floreni ad cruciferos reduci: ſcilicet 5 multiplicando per 60 acquiritur factum 300, quod exprimit 5 florenos reductos ad cruciferos.

60. PROBLEMA X. *Quemcunque numerum mixtum heterogeneum reducibilem reducere ad datam ſpeciem majorem, ſeu ſuperiorem.*

Resolut. Diſpiciatur, quotnam unitates ſpeciei minoris reducendæ, æquivaleant unitati ſpeciei majoris, & per numerum earum unitatum dividatur datus numerus reducendus: quotus enaſcens exprimet eundem numerum ad datam ſpeciem majorem jam reductum.

ctum. e. g. Sint reducenda 80 milliaria Italica ad milliaria Germanica. Quoniam 4 milliaria italica efficiunt unum milliare germanicum, datus numerus italicorum milliarium, id eſt, 80, dividatur per 4: quotus 20, exhibebit milliaria germanica, 80 italicis æquivalentia. Item ſint 300 cruciferi ad florenos reducendi. Quoniam 60 cruciferi efficiunt unum florenum, 300 dividantur per 60: quotus = 5 indicabit, 300 cruciferos quinque florenis æquivalere.

Schol. Si quod reſiduum manſerit ex diviſione; illud erit ejusdem ſpeciei cum dividendo. e. g. Si 312 cruciferi dentur ad florenos reducendi; hoc numero per 60 diviſo, quotus eſt = 5, & præterea manet reſiduum = 12. Hoc itaque reſiduum deſignat cruciferos: ut adeo 312 cruciferi æquivaleant 5 florenis, & præterea 12 cruciferis.

61. PROBLEMA XI. *Addere numeros mixtos heterogeneos reducibiles.*

Resolut. 1mo. Si addendi ſint numeri heterogenei *reducibiles*, e. g. floreni, groſſi, cruciferi ad florenos, groſſos, cruciferos, collocentur addendi numeri ſub ſe invicem, ita ut e. g. cruciferi reſpondeant cruciferis, groſſi groſſis, floreni florenis: tum juxta communes additionis regulas addantur imprimis ſibi numeri ſpeciei minimæ; tranſeatur deinde ad additionem numerorum ſequentis ſpeciei majoris, & ſic porro.

2do. Habitis ſingularum ſpecierum ſummis partialibus, minima ſpecies reducatur ope diviſionis (60) ad ſpeciem majorem proxime ſequentem; tum quotus ex diviſione enaſcens addatur ſummæ ejusdem ſpeciei majoris; ſi quod autem manſit reſiduum, ſcribatur infra numeros ſpeciei minoris (60. Schol.). Eodem modo reducatur ſequens ſumma ad ſpeciem majorem proxime ſequentem, & ſic porro.

flor.

	flor.	*gros.*	*crucif.*
e. g. Sint *Addendi*	10,	12,	2,
	9,	14,	1,
	—	16,	—
erunt fummæ partiales *nondum* reductæ	19,	42.	3,
erunt eædem jam *reductæ*	21,	3	—

Scilicet habitis jam partialibus fummis, 3 cruciferos per 3 dividendo reduco ad unum groffum, neque ullum manet refiduum: itaque ad fummam grofforum adjicio unitatem. Deinde, quoniam florenus 20 groffis æquivalet; 43 groffos per 20 dividendo, eosdem reduco ad 2 florenos: manent autem refidui 3 groffi, quos ducta linea transverfa infra groffos fcribo. Denique 2 florenos reductione acquifitos fummæ florenorum addo; atque ita obtineo 21 florenos, 3 groffos, & nullum cruciferum.

Schol. Si non adeft periculum confufionis; quamprimum peracta fuerit minimæ fpeciei additio, eadem fpecies illico reduci poterit ad fpeciem proxime fequentem, ac tum primum fequi additio fequentis illius fpeciei majoris, jam auctæ numero ex reductione acquifito. Idem eft de reliquis fequentibus fpeciebus intelligendum. Hinc in fequentibus exemplis nonnifi fummas fpecierum jam reductas adnotabimus.

EXEMPLA *Additionis mixtorum.*

		Hexap.	*Pedes,*	*Digit.*	*Lineæ.*
I.	*Addendi*	12,	5,	8,	10,
		3,	4,	11,	8.
	Summa	16,	4,	8,	6.

Confulatur TABULA I. num. 57.

		Centen.	Libr.	Semunc.	Drach.
II. Addendi	{	3,	75,	24,	3,
		2,	94,	30,	2,
		—	36,	9,	1,
Summa		7,	7,	— —	2,

Confulatur Tabula II. num. cit.

		Gradus,	Min. prima,	Min. fecun.
III. Addendi	{	8,	57,	36,
		3,	49,	54,
		4,	12,	30.
Summa		17,	— —	— —

Confulatur Tabula VI. num. cit.

62. PROBLEMA XII. *Subtrahere numeros mixtos heterogeneos reducibiles.*

Resolut. Collocentur fubtrahendi infra minuendos, ita ut e. g. cruciferi refpondeant cruciferis, groffi groffis &c. uti in *Additione* num. præc. dictum eft; tum a minima fpecie inchoando, peragatur fubtractio methodo confueta: hoc folum notato, quod in cafu conceffionis Regulæ 4tæ (num. 33.) conceffa unitas a fpecie majore tot valeat unitates, quot unitates fpeciei minoris in illa continentur. e. g. Si pro claffe grofforum unus florenus concedatur; hæc unitas valebit 20 unitates, feu 20 groffos: fi autem pro claffe cruciferorum concedatur unus florenus; hæc unitas valebit 60 unitates, feu 60 cruciferos.

e. g. Sit	*Minuendus*	*flor.*	9,	*crucif.*	45.
	Subtrahendus	*flor.*	5,	*crucif.*	52.
erit	*Refiduum*	*flor.*	3.	*crucif.*	53.

Cum enim 52 cruciferos nequeam fubtrahere a 45 cruciferis, ex claffe florenorum transfero unitatem, quæ in claffe cruciferorum valet 60 unitates: habeo ita-

itaque cruciferos 60 + 45 = 105; e quibus ſi ſubtrahantur 52, remanent cruciferi 53, infra lineam ſub cruciferis ſcribendi. Tranſeo deinde ad ſubtractionem florenorum: at jam 5 non a 9, ſed ab 8 habeo ſubtrahendos, cum 1 florenus ad claſſem cruciferorum ſit translatus. Erit ergo totum reſiduum = fl. 3, crucif. 53.

EXEMPLA *Subtractionis mixtorum.*

		Hexaped.	*Pedes,*	*Digit.*	*Lineæ*
I.	*Minuendus*	15.,	3.,	4.,	6
	Subtrahendus	6,	5,	10,	8
	Reſiduum	8	3.	5	10

		Centen.	*Libræ,*	*ſemunc.*	*Drachmæ*
II.	*Minuendus,*	1.,	48.,	25.,	1
	Subtrahendus	—	69,	29,	2
	Reſiduum	—	78	27	3

		Floren.	*Groſſi,*	*Cruciferi*
III.	*Minuendus*	100,	12,	1,
	Subtrahendus	50,	15,	2,
	Reſiduum	49,	16,	2.

Schol. 1. Multiplicatio numerorum mixtorum heterogeneorum reducibilium difficultate caret. Satis enim eſt ſingulas ſpecies multiplicare per datum numerum, tum facta particularia ad ſpecies majores proxime ſequentes reducere. e. g. Si floreni 3, groſſi 12, cruciferi 2 debeant multiplicari per 4; a minima ſpecie inchoando, multiplicentur per 4 ſingulæ ſpecies: erit factum = flor. 12, groſ. 48, crucif. 8. Porro minoribus ſpeciebus ad majores proxime ſequentes reductis, erit factum = flor. 14, groſ. 10, crucif. 2.

Schol. 2. Si numeros mixtos heterogeneos reducibiles per datum numerum dividere cupis; singulas species majores reduc ad speciem minimam, totumque in unam summam collige. Deinde summam hanc per datum numerum divide. Denique quotum ex hac divisione enascentem rursus ad species majores reduc. e. g. Sint 37 floreni, 13 grossi, & 1 crucifer dividendi in 4 partes. Reducantur omnes species ad cruciferos: erit summa totalis cruciferorum = 2260; quæ summa per 4 divisa dat quotum = 565 cruciferis. Hi cruciferi ad majores species reducti æquivalent florenis 9, grossis 8. & crucifero 1. Ceterum hoc etiam modo potest institui divisio: Imprimis divide 37 florenos per 4; pro quoto acquires 9 florenos, & 1 florenus erit residuus: deinde residuum hunc florenum in 20 grossos resolutum adde 13 grossis, & summam grossorum = 33 divide per 4; pro quoto altero acquires 8 grossos, & residuus erit 1 grossus. Denique residuum hunc grossum in 3 cruciferos resolutum adde 1 crucifero, & summam cruciferorum = 4 divide per 4; pro quoto obveniet crucifer unus. Atque ita obtinebis quotum totalem = 9 florenis, 8 grossis, 1 crucifèro, ut prius.

Schol. 3. His pertractatis agendum jam esset de fractionibus vulgaribus: at quia earum theoria longe faciliore methodo demonstratur in Algebra, eorum consilium sequimur, qui fractionum pertractationem ad Algebram rejiciendam censent.

FINIS ELEMENTORUM ARITHMETICÆ.

ELE-

ELEMENTA ALGEBRÆ.

SECTIO PRIMA.
DE PRIMIS CALCULIS ALGEBRAICIS.

CAPUT PRIMUM.
Definitiones, & Hypotheſes in Algebram univerſam.

Algebra eſt ſcientia, quæ ope literarum alphabeti ſecundum certas regulas inquirit in quantitates, & veritates ignotas, easque ex datis quibusdam cognitis infallibiliter eruit, ac determinat. Quid autem veniat *quantitatis* nomine, *Arith.* n. 1. dictum eſt.

2. Quantitates, quemadmodum in Arithmetica literis arabicis 1, 2, 3 &c. ita in Algebra minuſculis alphabeti latini literis ſolent deſignari: & cognitæ quidem quantitates primoribus alphabeti literis a, b, c, d; incognitæ autem poſtremis x, y, z deſignantur. Sæpe tamen memoriæ adjuvandæ cauſſa adhibentur primæ literæ earum vocum, quæ ipſas quantitates ſignificant. e. g. Tempus repræſentari ſolet litera t, celeritas litera c, ſpatium litera s, &c.

Schol. In Arithmetica, quælibet nota numerica certo loco ſcripta fixam habet ſignificationem: e. g. nota 3 ſemper tantum *tria* ſignificat (*Arith.* 16.). At in Algebra, literarum ſignificatio non æque fixa eſt, ſed eadem litera e. g. litera a pro ſigno cujuscunque quantitatis utcunque magnæ, aut parvæ aſſumi poteſt. e. g. Dentur duo numeri, 37, & 23 cum certo quæſtionis ſtatu, ex quibus tertius numerus incognitus, qui ſatisfaciat poſitæ quæſtioni, erui debeat: Algebraicus numero 37 literam a, & numero 23 literam b, aut aliam ſubſtituet,

ſtituet, tertium vero illum incognitum numerum litera x deſignabit; atque cum literis his per notas ſibi regulas operationem inſtituet, quæ ipſum in notitiam incogniti illius numeri deducet. Dentur deinde alii duo numeri, e. g. 342, & 400 cum alio quæſtionis ſtatu, ex quibus numeris itidem tertius aliquis numerus incognitus ſit eruendus: Algebraicus rurſus iisdem literis utetur; e. g. numerum 342 litera a, & numerum 400 litera b ipſi deſignabit, litera vero x tertium illum incognitum.

Schol. Quantitatibus literas ſubſtituendo, atque ita juxta regulas algebræ operando difficillimæ quæſtiones, quas ope numericæ Arithmeticæ vix, ac ne vix quidem enodaveris unquam, admirando compendio, faciiitateque ſolvuntur: profundiſſimæ veritates e tenebris eruuntur, & in plena luce collocantur. Hinc Algebra egregios omnino habet uſus in omnibus iis diſciplinis, in quibus certæ quantitatum ſpecies. e. g. numeri, lineæ, ſpatia, tempora, celeritates, vires, pondera &c. pertractantur; quaslibet enim quantitates literis deſignare, & ad calculum revocare poteſt: quapropter etiam *Calculus univerſalis* nuncupatur. Sed Tiro, priusquam præſtantiſſimos Algebræ fructus delibet, primos calculos algebraicos rite condiſcendos habet.

3. Quælibet quantitas vel eſt *poſitiva*, ſeu major nihilo, vel eſt *negativa*, ſeu nihilo minor; ut adeo nihilum ſit quaſi limes quidam quantitatum poſitivarum, & negativarum. e. g. 1) Poſſideat quispiam 10 florenos, nec ulli debeat quidquam; hi 10 floreni relate ad eum poſſeſſorem ſunt quantitas *poſitiva*, ſeu *nihilo major;* cum poſſeſſor ille plus habeat, quam nihil. 2) Poſſideat quispiam 10 florenos, ſed alteri cuipiam tantundem debeat: dicetur is *habere nihil*, cum omnis illa pecunia, quam poſſidet, ab æquali debito veluti extinguatur. 3) Poſſideat quiſpiam 10 florenos, ſed alteri cuipiam debeat 12 florenos: iſte habet quantitatem *negativam*, ſeu *nihilo minorem* duorum florenorum, id eſt, habet 2 florenos negativos. Tametſi enim omnes ſuos 10 florenos Creditori ſuo tradiderit, adhuc eidem debebit 2 florenos; ac proinde minus habet *nihilo*, ita ut

ut ad hoc, ut pure *nihil* habere intelligatur, indigeat adhuc 2 florenis, quibus debitum suum expungat.

4. Coroll. Id, quod desideratur ad hoc, ut is, qui nihilo minus habet, ad eum reponatur statum, in quo pure *nihil* habeat, est vera quantitas, & non merum nihilum. Sic in allato superius exemplo, 2 illi floreni, qui memorato Possessori necessarii essent ad hoc, ut is censeatur habere pure *nihil*, utique vera quantitas sunt, sed quæ quantitas comparate ad eum possessorem *negativa* sit, non *positiva*. Id ergo, quod *negativam* quantitatem appellamus, re vera est quantitas, & non merum nihilum; ita ut nonnisi comparate ad certa rerum adjuncta dicatur *negativa*. Aliqua de quantitate negativa adferentur etiam num. sequ. in *Scholio*.

5. Positiva quantitas designatur signo $+$ præfixo; negativa autem signo $-$ præfixo. Quum aliqua litera positivam quantitatem designans solitaria ponitur, non præfigitur ipsi signum $+$, sed istud subintelligitur: pariter, quum plures literæ interpositis signis conjunguntur, primæ literæ, si ea positivam quantitatem designet, nullum solet præfigi signum, sed ei signum $+$ subintelligitur esse præfixum. At negativæ quantitati signum $-$ semper expresse præfigitur. e. g. Sit tam a, quam b quantitas positiva; hoc modo scribendæ erunt: $a + b$. Si a fuerit quantitas positiva, b negativa; sic easdem scribes: $a - b$. Scilicet utroque casu positivæ quantitati a, quia primum in serie locum obtinet, nullum signum præfigitur, sed præfixum esse intelligitur signum $+$. Quod si autem utraque fuerit quantitas negativa; hoc modo scribuntur: $- a - b$. Porro ejusmodi signa, ut jam in Arithmetica (4) indicatum est, hoc modo enunciantur: $a + b$, *a plus b*; $a - b$, *a minus b*, &c.

Schol. Natura quantitatis positivæ, & negativæ solet etiam exemplo motus progressivi declarari. e. g. Si motum tuum versus orientem referas; passus, quos versus orientem facis, *positivi* sunt, quia versus orientem re ipsa progrederis: at si volens versus orientem progredi, versus occasum regrediaris; regressus in occasum comparate ad motum versus orientem factum *negativus* est. Immo quascunque duas quantitates di-

recte

recte oppositas inter se conferamus, e. g. lucrum & damnum, incrementum & decrementum, motum sursum, & motum deorsum &c. semper una quantitas relate ad alteram sibi oppositam quantitas negativa est; e. g. damnum respectu lucri, decrementum respectu incrementi, motus deorsum respectu motus sursum, & vicissim. Unde etiam si signum + significet lucrum, incrementum, motum sursum &c. signum — designabit damnum, decrementum, motum deorsum &c. Si autem signum + postrema hæc denotet, signum — priora illa designabit.

6. Signum = designat æqualitatem earum quantitatum, inter quas inseritur. Sic si velimus exprimere, quantitatem a esse æqualem quantitati b, hoc modo scribimus: $a = b$; sic autem enunciamus: *a æquale b.* Recole *Arith.* n. 4.

7. Dum quæpiam quantitas signo + interjecto adjungitur alteri, in Algebra, non secus ac in Arithmetica (*Arith.* 4.) significatur, eam quantitatem, cui id signum præfixum est, alteri addi: si autem quantitas una signo — interjecto jungatur alteri, significatur, eam quantitatem, cui signum illud præfixum est, ab altera tolli, seu *subtrahi.* e. g. $a + b$ significat, quantitatem b ad a addi; $a - b$ autem significat, quantitatem b ab a subtrahi, seu quantitatem a quantitate b mulctari.

8. Coroll. Quoniam *addi,* & *subtrahi* contraria sunt, perspicuum est, quantitatem positivam adjuncta æquali negativa reddi æqualem nihilo. e. g. $a - a$, vel $4 - 4$ æquantur nihilo. Hinc si duæ inæquales quantitates, quarum altera positiva sit, altera negativa, conjungantur; minor e majore semper tantum destruit, quanta est ipsa minor. Sic $6 - 4 = 2$; $3 - 8 = -5$.

9. Signum *multiplicationis* est crux decussata $\times$, aut punctum inter factores interjectum. e. g. 2×3, vel $2 . 3$ designat 2 multiplicari per 3, estque $= 6$. Est etiam signum multiplicationis, si factores absque ullo interjecto signo conjungantur. e. g. $a\,b$ significat a multiplicatum per b; $2\,a$ significat a multiplicatum per 2. Usitatissimum *divisionis* signum est, si indicetur per modum *fractionis,* id est, si *dividendas* subducatur linea,

&

& infra lineam fcribatur *divifor*. e. g. Si quantitatis a per quantitatem b divifio indicanda eft, fcribitur fic: $\frac{a}{b}$, & enunciatur fic: *a divifum* per *b*. Deinde divifionis fignum funt etiam duo puncta (:) interjecta inter dividendum, & diviforem. Sic $(a+b)$ *divifum* per $(c-d)$ nonnunquam fic exprimitur, $(a+b):(c-d)$.

10. Signum $>$ indicat quantitatem anteriorem effe majorem pofteriore: at fignum $<$ fignificat, anteriorem quantitatem pofteriore minorem effe. Hinc $a > b$ fignificat, quantitatem a effe majorem quantitate b; at $2 < 3$ indicat, numerum 2 numero 3 effe minorem.

11. Signum ∞ eft fignum quantitatis infinitæ. Hinc $a = \infty$ fignificat, quantitatem a effe infinitam. Signum autem o, feu *Zerus* eft fignum *nihili;* ita ut e. g. $3 - 3 = 0$ tantumdem fignificet, ac, 3 *minus* 3 æquari nihilo.

12. Quantitas dividitur in complexam, & incomplexam. Quantitas *complexa*, feu *polynomia* conftat e pluribus quantitatibus figno + vel — junctis. e. g. $ab + 2c - d$ eft quantitas complexa. Quantitas *incomplexa*, feu *monomia* eft, quæ non conftat e pluribus quantitatibus figno + vel — conjunctis. e. g. a eft quantitas incomplexa, item abc, vel $3ab$ &c. Porro in quantitate complexa quantitates illæ, quæ figno + vel — conjunguntur, ejusdem quantitatis complexæ *termini* nuncupantur: ut adeo totidem *terminis* conftet quantitas complexa, quot in eá reperiuntur quantitates figno + vel — conjunctæ. Sic quantitas complexa $ab + 2c - d$ tribus terminis conftat: primus eft ab, alter $+2c$, tertius $-d$. Quantitas complexa duobus terminis conftans vocatur *binomia;* tribus terminis conftans *trinomia*, & fic porro.

13. In Algebra literis numeri quoque fæpiffime adjunguntur. Iftud autem tripliciter fieri poteft. Nempe vel 1) inter literas & numeros interjicitur fignum + vel —, ut in hac quantitate complexa, $ab + c - 3$; vel 2) numeri præfiguntur literis figno + vel — non interjecto, ut $3ab$; vel denique 3) numeri literis a dextris furfum verfus adduntur, ut in hac quantitate: a^2.

14.

14. Numeri literis non interjecto signo + vel — præfixi vocantur earum *coefficientes*, afficiuntque totum terminum, cui præfiguntur, ac indicant, quoties terminus ille cum suo signo positus sit. Sic $3ab$ significat terminum ab ter esse positum; hoc est, $3ab$ est $= ab + ab + ab$. Unde patet, expressionem per coefficientes esse methodum compendiariam scribendi eosdem terminos aliquoties cum suo signo positos. Quod si autem cuipiam termino nullus præfigatur coefficiens; illic unitas præfixa intelligitur: quod evenit tunc, quum terminus cum suo signo semel tantum positus est. Sic loco $1ab$ solet omissa unitate scribi ab.

15. Numeri, qui literis a dextris sursum versus adscribuntur, vocantur earundem literarum *exponentes*. Jam *exponens* indicat, eam literam, cui ipse a dextris adscriptus est, toties esse multiplicatione positam, quot ipse exponens unitates in se continet. Sic a^3 significat, quantitatem a ter esse multiplicatione positam. Probe autem advertendum est, quid sit, aliquam quantitatem aliquoties esse *multiplicatione* positam. Nimirum quantitas a bis multiplicatione posita, seu a^2 est $= a \times a$; eadem quantitas ter multiplicatione posita, seu a^3 est $= a \times a \times a$; quater multiplicatione posita, seu a^4 est $= a \times a \times a \times a$, & sic porro. Consequenter tunc aliqua quantitas ponitur bis multiplicatione, quum semel per se ipsam multiplicatur; tunc ponitur ter multiplicatione, quum bis per se ipsam multiplicatur, & sic porro. Unde patet, *exponentes* non esse confundendos cum *coefficientibus*, longeque aliud esse e. g. a^2, ac sit $2a$. Quippe $2a$ significat quantitatem a bis *additione* esse positam, seu est $2a = a + a$; at a^2 significat quantitatem a bis esse *multiplicatione* positam, seu est $a^2 = a \times a$. Hinc si ponatur $a = 3$; est $2a = 6$, & $a^2 = 9$. Porro *exponens* eam solum literam afficit, cui a dextris jungitur. Sic in quantitate $abc^2 d$, exponens 2 solam literam c indicat bis esse multiplicatione positam. Contraria est *coefficientium* natura, uti num. præc. exposuimus. Denique sicubi desit exponens, illic unitas intelligitur esse exponens. e. g. Est $a = a^1$.

Schol. 1. Interdum pro exponentibus adhibentur literæ minusculæ loco numerorum. e. g. a^m significat, quan-

quantitatem a toties esse multiplicatione positam, quot in quantitate m unitates continentur. Nonnunquam pro exponentibus adhibentur literæ numeris permistæ; e. g. a^{m-2}.

Schol. 2. Valor termini, quantitatem complexam constituentis, in Algebra prorsus non dependet a loco, quem is terminus comparate ad reliquos terminos occupat. Hinc valor quantitatis complexæ non mutatur, quo demum cunque ordine scribantur termini eandem componentes. e. g. Est $ab + c - d = c + ab - d = ab - d + c = c - d + ab$ &c.

16. Quantitates monomiæ, seu *termini* dividuntur in homogeneos, & heterogeneos. Duo termini tunc dicuntur *homogenei*, quum iisdem accurate literis constant, & quidem ita, ut eadem litera eundem habeat in utroque termino exponentem; neque tamen officiet homogeneitati, si termini illi diversa signa sibi præfixa, aut diversos coefficientes habuerint. Ex adverso duo termini sunt *heterogenei*, si non iisdem accurate literis constent, aut si aliqua litera alium in uno, alium in altero termino exponentem habeat; sive deinde termini illi iisdem gaudeant signis, & coefficientibus, sive diversis. Sic 1) abc^2 & abc^2 sunt termini homogenei, quia iisdem accurate literis constant, & quælibet litera eundem habet exponentem in uno termino, quem habet in altero. 2) Eandem ob caussam homogenei sunt termini $2a^2b$ & $-a^2b$, tametsi diversis signis, & coefficientibus gaudeant. At 3) termini abc & ab heterogenei sunt; quia prior terminus habet aliquam literam, scilicet c, qua terminus alter caret, ac proinde non constat uterque terminus iisdem accurate literis. 4) Pariter heterogenei sunt termini abc, & a^2bc; quia tametsi uterque iisdem constet literis, attamen litera a non habet eundem exponentem in uno termino, quem habet in altero. 5) Potiori jure heterogenei sunt termini abc^2, & a^2cf; quia neque constant iisdem accurate literis, neque habent eosdem exponentes literæ a & c in uno termino, quos habent in altero.

CA-

CAPUT SECUNDUM.

De Additione, Subtractione, & Multiplicatione Algebraica quantitatum integrarum.

17. **PROBLEMA I.** *Quantitates algebraicas addere.*

Resolut. 1*mo* Partes addendæ retentis ſingularum ſignis ſcribantur infra eas, ad quas addendæ ſunt, tum linea transverſa ſubducantur.

2*do*. Diſpiciatur, quinam partium addendarum termini ſint inter ſe homogenei, & num termini homogenei iisdem gaudeant ſignis, an contrariis. Quod ſi termini homogenei eodem ſigno gaudeant; coefficientes iis præfixi addantur in unam ſummam, hæcque ſumma retento communi ſigno præfigatur communibus terminorum literis, quin earum literarum exponentes immutentur. e. g. Si in una parte addenda reperiatur terminus $+3a^2b$, in altera terminus $+2a^2b$; quoniam hi termini ſunt homogenei, eodemque ſigno $+$ affecti, eorum coefficientes 3 & 2 in unam ſummam colligantur, eaque ſumma $= 5$ præfigatur literis utrique illi termino communibus, ſeu literis a^2b, quin earundem exponentes immutentur: duorum illorum homogeneorum ſumma, infra lineam tranſverſam ſcribenda, erit $= 5a^2b$.

3*tio*. Si vero termini homogenei contrariis ſignis afficiantur; minor coefficiens ſubtrahatur a majore, & reſiduum, quod ex hac ſubtractione manet, cum ſigno majoris coefficientis præfigatur communibus terminorum literis. e. g. Si in una parte addenda reperiatur terminus $+3a^2b$, in altera autem terminus $-2a^2b$; quoniam hi termini ſunt homogenei, contrariis ſignis affecti, coefficiens minor 2 ſubtrahatur a majore 3, & reſiduum $= 1$ cum majoris coefficientis ſigno $+$ præfigatur communibus literis a^2b, quin earundem exponentes immutentur: duorum illorum terminorum ſumma erit $= 1a^2b$; ſeu quoniam 1 pro coefficiente non

ſolet

ſolet expreſſe poni, ſed ſubintelligi (14), dicta ſumma erit $= a^2b$.

4to. Si termini homogenei contrariis ſignis affecti, æquales habuerint coefficientes; ii termini penitus omittantur.

5to. Denique termini heterogenei conjungantur cum ſuis ſignis absque ulla mutatione.

e. g. Sint partes *addendæ* $\left\{ \begin{array}{l} 3a^2b + 2cd - fg \\ 2a^2b - 3cd + fg \\ ab^2 - cd + df \end{array} \right.$

Erit *Summa* $5a^2b + ab^2 - 2cd + df$.

Nam a ſiniſtris inchoando, termini $3a^2b$ & $2a^2b$ ſunt homogenei, eodem ſigno + ſubintellecto affecti; eorum ergo ſumma per Reg. 2dam eſt $= 5a^2b$: quæ ſcribatur infra lineam. Terminus ab^2 cum nullo alio termino eſt homogeneus (16); iſte ergo cum ſuo ſigno per Reg. 5tam absque ulla mutatione ſcribatur infra lineam. Porro termini $2cd$, $= 3cd$, & $- cd$ ſunt homogenei, ſed non eodem omnes ſigno affecti: quia vero ſumma duorum terminorum $- 3cd$ & $- cd$, eodem ſigno affectorum eſt per Reg. 2dam $= - 4cd$; tres illi termini æquivalent his duobus: $+ 2cd - 4cd$. Horum autem duorum ſumma per Reg. 3tiam eſt $= - 2cd$; quæ proinde ſumma ſcribatur infra lineam. Deinde $- fg$ & $+ fg$ ſunt termini homogenei contrariis ſignis affecti, & æqualibus coefficientibus gaudentes: ii ergo per Reg. 4tam penitus omittantur. Decique terminus df cum nullo alio termino convenit accurate in ſuis literis, & coefficientibus, adeoque pro heterogeneo eſt habendus: adjiciatur ergo per Reg. 5tam ſummæ reliquæ absque ulla mutatione.

18. Demonstr. Ratio 2dæ regulæ ex n. 14 patet; hæc enim regula non aliud exigit, quam compendiariam methodum ſcribendi terminos, cum ſuo ſigno aliquoties poſitos. Ratio reg. 3tiæ, & 4tæ n. 8 continentur. Ratio denique reg. 5tæ eſt; quia heterogeneæ quantitates additione temere confundi non poſſunt. Recole *Arith.* n. 28.

Schol. Examen rite peractæ additionis fit ope subtractionis sequ. Probl. pertractandæ.

EXEMPLA *Additionis algebraicæ.*

I. *Partes addendæ* $\begin{cases} 3ax + 4bx - 2de \\ 2ax - 3bx + 2de \end{cases}$

Summa $5ax + bx.$

II. *Partes addendæ* $\begin{cases} 5a^2b - 3a^2c - 4 \\ -a^2b + a^2c + 3 \end{cases}$

Summa $4a^2b - 2a^2c - 1$

III. *Partes* $7a^3bc - 2a^2bc + 2cd + fg - 10$

addendæ $-4a^3bc + 7a^2bc - cd - fg - 5$

$- a^3bc - a^2bc - cd + 10fg + 20$

Summa $2a^3bc + 4a^2bc + 10fg + 5$

19. PROBLEMA II. *Quantitates algebraicas subtrahere.*

Resolut. Pars subtrahenda subscribatur quantitati *minuendæ*, seu *toti*, ductaque linea transversa mutentur signa omnia partis subtrahendæ in contraria, nempe $+$ in $-$, & $-$ in $+$; tum eadem pars subtrahenda jam contrariis signis affecta addatur per regulas superiores (17) quantitati *minuendæ*: summa ex hac additione enascens erit ipsum residuum quæsitum. e. g.

Sit *quantitas minuenda*, $4ab + 3cd - 5fg$,
pars subtrahenda $ab + 2cd - fg$,

Erit *Residuum* $3ab + cd - 4fg$.

Scilicet pars *subtrahenda* mutatis in contraria signis abit in hanc quantitatem: $-ab - 2cd + fg$; adeoque hæ duæ quantitates sunt sibi addendæ:

$$\begin{array}{r} 4ab + 3cd - 5fg \\ -ab - 2cd + fg. \end{array}$$

Quarum *summa* est $= 3ab + cd - 4fg$.

Quod

Quod autem hæc ſumma ſit ipſum quæſitum reſiduum, hoc modo demonſtratur:

20. Demonstr. Terminus ſubtrahendus vel eſt poſitivus, vel negativus. Si poſitivus eſt; rite ſubtrahitur, ſi mutato ſigno addatur quantitati minuendæ: poſitivum enim tollere idem eſt, ac tantundem negativi addere (8). Si eſt negativus; negativum tollere idem eſt, ac tantundem poſitivi addere: ſic ſi tres florenos alteri debeas, id eſt, ſi tres florenos *negativos* habeas; hi tres negativi floreni tollentur tibi, ſi totidem florenos reapſe acquiras: ergo negativus quoque terminus rite ſubtrahitur, ſi mutato ſigno quantitati *minuendæ* addatur. Conſequenter generatim, quantitates quaſcunque algebraicas ſubtrahere idem eſt, ac easdem mutatis in contraria ſignis quantitati *minuendæ* addere.

EXEMPLA *Subtract. algebr.*

I. *Quantitas minuen.* $5ax + bx$
Pars Subtrahen. $2ax - 3bx + 2de$
Reſiduum $3ax + 4bx - 2de$

II. *Minuend.* $4a^2b - 2a^2c - 1$
Subtrahend. $-a^2b + a^2c + 3$
Reſiduum $5a^2b - 3a^2c - 4$

III. *Minuen.* $2a^3bc + 4a^2bc + 10fg + 5$
Subtrah. $a^3bc - a^2bc - cd + 3fg + 7$
Reſiduum $a^3bc + 5a^2bc + cd + 7fg - 2$

Schol. Quemadmodum de numeris locuti ſumus (Arith. 38, 30, & 40), ita etiam algebraicæ additionis *examen* per ſubtractionem, ſubtractionis vero per additionem obtinetur. E. g. 1mum additionis algebraicæ exemplum (n. 18. in Scholio) eſt legitimum; quia ſi ex ſumma $5ax + bx$, ſubtrahas unam partium addendarum, e. g. hanc: $2ax - 3bx + 2de$, reſiduum eſt æquale alteri parti addendæ, ſeu huic: $3ax - 4bx - 2de$. Item e. g. 2dum ſubtractionis algebraicæ exemplum paullo ſuperius (hoc num. 20.) allatum, legiti-

gitimum est; si enim residuum $5a^2 b - 3a^2 c - 4$ addas parti subtrahendæ $- a^2 b + a^2 c + 3$; summa ex hac additione enascens est æqualis *toti*, seu quantitati *minuendæ* $4a^2 b - 2a^2 c - 1$.

21. PROBLEMA III. *Quantitates algebraicas multiplicare.*

Resolut. 1mo. Scribatur multiplicator infra multiplicandum, ductaque linea transversa, per singulos multiplicatoris terminos multiplicetur quilibet terminus multiplicandi. Hæc autem multiplicatio fit præcise conjungendo literas multiplicatoris cum literis multiplicandi. e. g. Si terminus ab multiplicandus sit per terminum cd; *factum* est $abcd$. Solent autem hujusmodi literæ ordine alphabeti scribi, e. g. Solet scribi ab, non ba. Ceterum tametsi ordo alphabeti plerumque observetur, is tamen non est prorsus *necessarius*. Cum enim idem factum prodeat, sive quantitas a multiplicetur per b, sive b per a, uti ex *Arith. n.* 43. intelligere licet; factum ab prorsus idem esse debet cum facto ba.

2*do*. Quod attinet ad signum *facto* ex terminorum multiplicatione enascenti præfigendum: videndum est, num factores contrariis signis affecti sint, unus positivo, alter negativo; an vero uterque factor eodem signo gaudeat, scilicet vel uterque positivo, vel uterque negativo. Si factores contrariis signis sint affecti; facto ex eorum multiplicatione enascenti præfigi debet signum negativum $-$. Sic si debeat multiplicari $+ ab$ per $- cd$; acquiritur factum $- abcd$. Quod si autem uterque factor eodem signo gaudeat, sive positivo, sive negativo; facto signum positivum $+$ est præfigendum. Sic si debeat multiplicari $+ ab$ per $+ cd$; acquiritur factum $+ abcd$. Pariter si $- ab$ per $- cd$ multiplicandum sit, est factum $+ abcd$.

3*tio*. Coefficientes terminorum multiplicentur inter se more aliorum numerorum, eorumque factum præfigatur facto literali. e. g. Si multiplicari debeat $2ab$ per $4cd$; erit factum $= 8abcd$. Scilicet coefficientes 2 & 4 multiplicantur inter se, eorumque factum 8 præfigitur facto literali.

4*to*. Si litera quæpiam in utroque factore reperiatur; ea non debet in facto bis scribi, sed semel duntaxat: at ejus exponentes, quorum unum in uno factore habet, alterum in altero, in unam summam colligantur, hæcque summa adscribatur ipsi in facto pro exponente. e. g. Sit $a^2 b$ multiplicandum per ac: litera a in facto semel duntaxat scribi debet; at pro exponente adscribatur ei a dextris sursum versus numerus 3, cum ejus exponens in multiplicando sit 2, in multiplicatore autem sit unitas subintellecta, horumque exponentium summa sit $= 3$. Hinc $a^2 b \times ac$ est $= a^3 bc$. Eodem modo $a^2 \times a^3 = a^5$; $ab^2 \times ab = a^2 b^3$; $a^m b \times ab = a^{m+1} b^2$, & sic porro.

5*to*. Postquam singuli quantitatis *multiplicandæ* termini per singulos *multiplicatoris* terminos multiplicati fuerint; facta particularia juxta leges additionis (17) colligantur in unam summam: summa hæc erit ipsum totale *factum*. e. g.

Sit *Multiplicand.*	$a + 2b - c$
Multiplicat.	$a - 2b$
Erunt *facta partialia.*	$a^2 + 2ab - ac$
	$- 2ab - 4b^2 + 2bc$
Factum totale	$a^2 - ac - 4b^2 + 2bc$

Scilicet $a \times a$ est (per reg. 4.) $= a^2$, quod proinde infra lineam scribatur. Deinde $+ 2b \times + a$ (per reg. 2.) est $= + 2ab$. Denique $- c \times + a$ est (per reg. 4.) $= - ac$. Consequenter totum *multiplicandum* per primum multiplicatoris terminum, seu per a multiplicando, acquiritur factum partiale, in prima infra lineam serie scribendum, $= a^2 + 2ab - ac$.

Per alterum deinde multiplicatoris terminum, seu per $- 2b$ multiplicetur totus multiplicandus. Ac imprimis $a \times - 2b$ est $= - 2ab$. Deinde $+ 2b \times - 2b = - 4b^2$, Denique $- c \times - 2b + 2bc$. Atque adeo alterum partiale factum, in secunda infra lineam serie scribendum, est $= - 2ab - 4b^2 + 2bc$.

Denique si partialia hæc facta juxta regulas additionis (17) in unam summam cogantur; erit totale factum $= a^2 - ac - 4b^2 + 2bc$.

22. Demonstrat. Regula *1ma* est hypothesis (Arith. 4.). Diximus enim num. 9. receptum in Algebra multiplicationis signum esse id quoque, si factores absque ullo signo interjecto conjungantur.

Regulæ *2dæ* pars *1ma*, quod nimirum *facto* negativum signum sit præfigendum, si factores contraria signa habeant, facile patet. Eo enim casu *factum* consurgit ex factore negativo toties sibi addito, quoties in altero factore positivo unitas continetur (Arith. 42, & 44.): ergo eo casu *factum* negativa quantitas sit, oportet. Sic e. g. 2 floreni negativi (id est, debitum 2 florenorum) ter sumpti utique summam negativam efficiunt, scilicet debitum sex florenorum. Eo ipso autem patet, facto illi negativum signum esse præfigendum.

Ejusdem regulæ *2dæ* pars *altera*, quod nimirum facto positivum signum sit præfigendum, si factores eodem signo gaudeant, sic ostendo. Si uterque factor eodem signo gaudeat; vel uterque gaudet signo positivo, vel uterque negativo. Si uterque factor positivus sit; perspicuum est, factum quoque positivum esse debere: tunc enim *factum* consurgit ex uno factore positivo toties sibi addito, quoties unitas in altero factore positivo continetur (Arith. cit.). Sic 2 floreni ter accepti efficiunt utique summam positivam sex florenorum. Quodsi autem uterque factor negativus fuerit, hoc modo regula demonstrari potest. Sint factores negativi $-a$, & $-b$. Certum est per reg. 1. factum literale esse debere ab; dubium tantummodo est, debeatne esse $+ab$, an $-ab$. At ajo, non posse esse $-ab$; & sic declaro. Concipiamus factorem $-a$ multiplicari jam per $a+b$, jam per $a-b$: nequit idem utroque casu totale factum prodire; nam in priore casu $-a$ toties debet in facto contineri, quoties unitas continetur in multiplicatore $a+b$, in altero autem casu idem $-a$ nonnisi toties continetur in facto, quoties unitas in factore $a-b$. Atqui si $-a \times -b$ esset $= -ab$; idem profecto totale factum prodiret, sive $-a$ per $a+b$, sive per $a-b$ multiplicetur. Nam in priore

priore casu (per 1*mam* hujus regulæ partem jam demonstratam) factum totale est $= - a^2 - ab$: in casu altero (per eand. 1*mam* reg. partem) primum factum partiale, seu $-a \times a$ est $= - a^2$; adeoque si præterea $-a \times - b$ esset $= - ab$, etiam in casu altero factum totale esset $= - a^2 - ab$. Ergo $-a$ multiplicatum per $-b$, factum positivum $+ ab$ det, est necesse. Scilicet, quemadmodum negare negationem est *affirmare*, ita etiam negativam quantitatem per negativam multiplicare, est factum positivum producere.

Ratio regulæ 3*tiæ* est. Si enim e. g. $2a$ sit multiplicandum per $4b$, factum esse debere $= 8ab$, sic demonstro. Ponamus esse $2 = m$, & $4 = n$: erit imprimis (per reg. 1mam) $2a \times 4b = mnab$; erit deinde $mn = 8$. Itaque in facto $mnab$ loco mn substitui potest 8, eritque $2a \times 4b = 8ab$. Eodem modo in quolibet alio casu veritas regulæ ostendi potest.

Regulæ 4*tæ* ratio est. Si enim e. g. a^2 sit multiplicandum per a^3, factum esse debere $= a^5$ sic ostendo. Est $a^2 = aa$, & $a^3 = aaa$ (15): ergo a^2 multiplicare per a^3 idem est, ac aa multiplicare per aaa. Atqui, si aa multiplicetur per aaa, est factum $= aaaaa$; ergo idem est factum etiam tunc, quum a^2 multiplicatur per a^3. Jam vero est $aaaaa = a^5$ (15); ergo si a^2 multiplicetur a^3, factum est $= a^5$. Atque demonstratio hæc cuilibet alteri casui particulari æque accommodari potest.

Regula 5*ta* demonstratione non eget.

EXEMPLA *Multipl. Algebr.*

I.	*Multiplicand.*	$a + b$	*Factores*
	Multiplicat.	$a - b$	
	Facta partialia	$a^2 + ab$	
		$- ab - b^2$	
	Factum totale	$a^2 - b^2$	

 II.

II.	*Multiplicand.*	$a^m + bc^2$	*Factores*
	Multiplicat.	$a - b^2$	

Factum totale $a^{m+1} + abc^2 - a^m b^2 - b^3 c^2$.

III.	*Multiplicand.*	$2a + 3b - c$	*Factores*
	Multiplicat.	$3a + 2b + c$	

Factum tot. $6a^2 + 13ab - ac + 6b^2 + bc - c^2$.

Schol. 1. Si indicanda sit duarum polynomiarum quantitatum multiplicatio mutua, quin eadem multiplicatio reapse peragatur; quantitates illæ seorsim parenthesi includi solent, interjecto ipsis multiplicationis signo $\times$, aut puncto, vel etiam nullo signo interjecto. *e.* g. Si scribatur: $(a + b) \times (c - d)$, vel $(a + b).(c - d)$, vel $(a + b)\ (c - d)$; indicatur, quantitatem polynomiam $a + b$ multiplicari per $c - d$. Similiter e. g. $(M + m)\ X$ significat, quantitatem polynomiam $M + m$ multiplicari per X.

Schol. 2. *Examen* rite peractæ multiplicationis ope divisionis docebitur *Cap. sequ.*

CAPUT TERTIUM.

De Divisione Algebraica.

23. THEOREMA I. *Si uterque terminus, tam dividendus, quam divisor, fuerit positivus; quotus quoque positivus sit, oportet. Pariter positivus est quotus, si tam dividendus terminus, quam etiam divisor fuerit negativus.*

DEMONSTR. 1*mæ partis*. In legitima divisione, si divisor ducatur in quotum, factum inde enascens debet esse æquale dividendo (*Arith.* 55.): sed si tunc: quum tam terminus dividendus, quam etiam divisor est positivus, quotus esset negativus; is quotus in divisorem ductus non esset æqualis dividendo, seu non redderet dividendum: quotus enim negativus in positivum diviso-

viſorem ductus dat factum negativum, non poſitivum (21. reg. 2.); ergo ſi uterque terminus (ſcilicet tam dividendus, quam diviſor) poſitivus fuerit, quotus nequit eſſe negativus, ac proinde poſitivus ſit, oportet.

Demonstr. *2dæ partis.* Nam quotus in diviſorem ductus reſtituere debet dividendum, uti nunc dictum eſt: atqui, ſi in dicto caſu quotus eſſet negativus, is in diviſorem pariter negativum ductus non reſtitueret dividendum negativum, duo enim factores negativi dant factum poſitivum, non negativum (21. reg. 2.); ergo, ſi tam diviſor, quam dividendus fuerit negativus, quotus enaſcens poſitivus ſit, oportet.

24. Coroll. Ergo generatim, ſi diviſor & dividendus eodem ſigno gaudeant, ſive poſitivo, ſive negativo; quoto ex diviſione enaſcenti ſignum + eſt præfigendum.

25. THEOREMA II. *Si quantitas negativa per quantitatem poſitivam, aut poſitiva per negativam dividatur, quotus eſt negativus.*

Demonstr. Quotus enim poſitivus in diviſorem ductus in neutro caſu reſtitueret dividendum, ut conſideranti clarum eſt.

26. Coroll. Igitur generatim, ſi diviſor & dividendus contrariis ſignis afficiantur; quoto ex diviſione enaſcenti ſignum — eſt præfigendum.

27. PROBLEUA IV. *Quantitatem algebraicam monomiam per aliam monomiam (ſiquidem diviſio poſſibilis ſit) dividere.*

Resolut. Diſpiciatur, num totus diviſor contineatur in dividendo tanquam unus factorum: & ſiquidem contineri deprehendatur; poſſibilis eſt diviſio actualis. e. g. Sit dividendus ab, diviſor a. Video, diviſorem hunc in ab totum contineri tanquam unum factorum; nam quantitas ab conſtat ex a & b tanquam factoribus, cum nihil aliud ſit ab, quam a multiplicatum per b: concludo itaque poſſibilem eſſe hoc in caſu diviſionem actualem. His autem legibus peragenda eſt id genus diviſio. 1*mo*. Videatur, quiſnam ſit alter ille factor, qui præter diviſorem in dividendo continetur: atque alter ille factor erit quotus quæſitus. e. g. Sit

Sit dividendus ab, divisor a. Quoniam in ab præter divisorem a alter factor b continetur; ex hac divisione enascens quotus est b. Ratio est: nam si aliqua quantitas constet duobus quibusdam factoribus; in ea quantitate toties continetur unus factor, quot unitates alter factor in se continet (Arith. 44.): consequenter a in ab continetur per b; hoc est, a in ab toties continetur, quot unitates continentur in b: adeoque si ab dividatur per a, quotus est b. Pariter si abc dividendum sit per a, quotus est bc: possum enim terminum abc in duos factores a & bc resolvere; hinc si is terminus dividatur per a, quotus erit alter factor bc.

2do. Coefficiens dividendi dividatur per coefficientem divisoris. e. g. Si $8ab$ dividi debeat per $4a$, quotus est $2b$. Consideranti enim facile patet, hac ratione acquiri alterum illum factorem, qui in dividendo præter divisorem continetur, quemve ipsum quæsitum quotum esse, paullo superius in reg. 1ma vidimus. Sic $8ab$ non aliud utique est, quam divisor $4a$ per $2b$ multiplicatus. Quodsi autem coefficiens dividendi nequeat exacte dividi per coefficientem divisoris; indicetur tantummodo divisio, coefficientem divisoris scribendo infra coefficientem dividendi lineol. interjecta. e. g. Si $2ab$ dividi debeat per $3a$, quotus est $\frac{2}{3}b$.

3tio. Generatim, si quas literas communes habeant divisor & dividendus; eæ in quoto semel duntaxat scribantur: at id genus litera in quoto alium jam exponentem habebit, ac habuerit in divisore, vel dividendo: scilicet is exponens, quem ejusmodi litera in divisore habet, subtrahatur ab eo exponente, quem habet in dividendo, atque residuum ex hac subtractione resultans adscribatur ipsi pro novo exponente in quoto. e. g. Si a^3b dividi debeat per a^2; quotus est ab. Ratio est; nam a^3b est $= aaab$, & $a^2 = aa$ (15); jam vero si $aaab$ dividi debeat per aa, quotus (per reg. 1.) est ab, quippe quantitas $aaab$ præter divisorem aa continet in se factorem alterum ab: ergo etiam, si a^3b dividatur per a^2, quotus est ab. Hoc est, litera a, quæ communis est tam divisori, quam dividendo, semel duntaxat ponitur in quoto; at novum habet exponentem,

tem, scilicet unitatem (solitam subintelligi duntaxat, non expresse scribi) quæ est differentia enascens ex subtractione exponentis 2 ab exponente 3. Pariter si amb per a^2 dividi debeat, quotus est $a^{m-2}b$. Quodsi autem ejusmodi litera eundem habeat exponentem in divisore, & in dividendo; ea in quoto pro novo exponente acquiret zerum, si enim unus exponens ab altero sibi æquali subtrahatur, residuum est utrique zerus: porro omnis quantitas habens pro exponente zerum, est æqualis unitati, uti *sequ. Sect.* demonstrabitur; itaque tunc loco id genus literæ sufficit in quoto ponere, aut subintelligere unitatem. e. g. Si ab dividatur per a; juxta regulam hanc quotus est $= a^0 b = 1b$, seu quoniam unitas in consortio alterius factoris subintelligi duntaxat, non expresse scribi solet, est $= b$. Eodem modo si $a^2 b$ dividatur per a^2, quotus est b.

4to. Quod ad signum quoto præfigendum attinet, hæc generatim regula est præ oculis habenda: si divisor, & dividendus eodem signo gaudeant, sive positivo, sive negativo; semper quotus est positivus, atque adeo signum $+$ ipsi præfigendum (24): quodsi autem divisor & dividendus contraria signa habeant, quoto, utpote negativo, signum $-$ præfigi debet (26). Sic si $+ab$ per $+b$, vel $-ab$ per $-b$ dividatur; pro quoto obvenit $+a$: at, si $-ab$ per $+b$, vel $+ab$ per $-b$ dividi debeat; quotus est $-a$.

Schol. Si in dividendo non contineatur totus divisor, tanquam unus ex factoribus dividendi; non est tentanda divisio, utpote impossibilis, sed indicanda duntaxat, ducendo lineam transversam infra dividendum, subscribendoque divisorem. Sic si dividendus sit ab, divisor dc; quotus hoc modo est exprimendus: $\frac{ab}{dc}$.

Sæpe tamen evenit, ut, tametsi totus divisor non contineatur in dividendo tanquam factor, aliquæ tamen literæ, una vel plures, communes sint dividendo & divisori, ut si dividendus sit ab, divisor bc: quo casu in exprimendo quoto compendio est locus. e. g. In exemplo nunc memorato quotus est $\frac{ab}{bc}$; qui compen-

dio-

diofius exprimi poteſt hoc modo $\frac{a}{c}$. Scilicet communem utrique literam *b* penitus negligendo. At de hujusmodi compendiis *Cap. ſequ.* in theoria fractionum erit agendi locus.

28. PROBLEMA V. *Quamcunque polynomiam quantitatem algebraicam per aliam dividere.*

Resolut. 1*mo*. Scribatur primum diviſor; tum in eadem linea ſcribatur dividendus parentheſi incluſus. Deinde diſpiciatur, in quonam dividendi termino contineatur totus diviſoris primus terminus, tanquam unus factorum, & is dividendi terminus per primum diviſoris terminum dividatur juxta regulas præc. n. 27. allatas; tum quotus ſcribatur poſt dividendum. Porro quotus iſte multiplicetur per totum omnino diviſorem, & factum ex hac multiplicatione enatum ſubtrahatur a quantitate dividenda. Quodſi ex hac ſubtractione nullum remaneat reſiduum, peracta eſt diviſio tota. e. g.

Sit *Diviſor*,	*Dividendus*,	erit *Quotus*.
$M + m$,	$(MX + mX)$	X.

Nam primus diviſoris terminus M in primo dividendi termino MX continetur per X: itaque pro quoto ſcribo X. Hic quotus in totum diviſorem ductus dat factum $= MX + mX$. Iſtud factum ſi a dividendo ſubtrahatur; nullum reſiduum manet pro ulteriore operatione: tota ergo jam diviſio peracta eſt, ac proinde quotus eſt $= X$.

2*do*. Quodſi ex ſubtractione memorata remaneat quodpiam reſiduum; cum hoc reſiduo repetatur eadem, quæ prius, operatio. Scilicet diſpiciatur, in quonam ejus reſidui termino contineatur totus diviſoris terminus primus, tanquam factor, & is reſidui terminus per primum diviſoris terminum dividatur juxta regulas n. 27. allatas; tum quotus cum ſuo ſigno ſcribatur poſt quotum priore operatione inventum. Porro novus iſte quotus multiplicetur per totum omnino diviſorem, & factum ex hac multiplicatione enatum ſubtrahatur a dicto reſiduo. Si ex hac quoque altera ſubtra-

tra-

tractione quodpiam residuum maneat; eodem pacto continuetur operatio, dum nihil denique restet e dividendo. e. g.

Sit *Divisor*, *Dividendus*, erit *Quotus*.

$$a^2 - c^2 \left(a^4 + c^2 x^2 - a^2 c^2 - a^2 x^2 \right) a^2 - x^2.$$

Nam primus divisoris terminus a^2 in primo dividendi termino a^4 continetur per a^2 (27. reg. 3.); itaque a^2 scribatur pro quoto. Hic quotus in totum divisorem ductus dat factum $= a^4 - a^2 c^2$; quod factum si a dividendo subtrahatur, manet residuum $= + c^2 x^2 - a^2 x^2$. Cum residuo hoc repetatur eadem operatio. Scilicet video primum divisoris terminum a^2 in residui hujus termino $- a^2 x^2$ contineri tanquam factorem; qui terminus residui si per a^2 dividatur, quotus est $- x^2$ (27. *reg*. 3. & 4.). Scribatur ergo $-x^2$ pro novo quoto. Novus hic quotus in totum divisorem ductus dat factum $= - a^2 x^2 + c^2 x^2$; quod factum si ab eo residuo subtrahatur, nullum amplius manet residuum. Peracta ergo jam est tota divisio, acquisitusque quotus totalis $= a^2 - x^2$.

Schol. 1. Quemadmodum de numerica multiplicatione, divisioneque locuti sumus *Arith.* n. 56. ita etiam algebraicæ multiplicationis *examen* per divisionem, *examen* vero divisionis per multiplicationem obtinetur. Scilicet algebraica quoque multiplicatio tunc est legitima, si *facto* per unum factorem diviso, alter factor obveniat pro quoto; divisio autem tunc legitima est, si quotus in divisorem ductus restituat dividendum. Atque vel hinc elucet, per regulas superius allatas rite peragi divisionem algebraicam: si enim quotus per eas regulas obtentus in divisorem ducatur, semper restituit dividendum, ut periclitanti patebit.

Schol. 2. Si, dum per allatas regulas divisio algebraica tentatur, advertatur inter operandum, subtractione ejus facti, quod enascitur e quoto in divisorem ducto, nequaquam minui numerum terminorum in dividendo, sed potius augeri; id erit plerumque indicium, divisionem absque residuo peragi non posse. Quare indice-

dicetur duntaxat divisio, divisore infra dividendum interjecta linea subscripto.

EXEMPLA *Divisionis Algebr.*

	Divisor,	*Dividendus,*	*Quotus*
I.	$a - b$	$(a^2 - b^2)$	$a + b$

II. *Divisor,* *Dividendus,* *Quotus*

$2a + b^2 (2am^{+1} + am b^2 + 8abc^2 + 4b^3 c^2) am + 4bc^2$.

	Divisor,	*Dividendus,*	*Quotus,*
III.	$2a - b + c$	$\left[\begin{array}{l} 2a^2 + 3ab - ac \\ -2b^2 + 3bc - c^2 \end{array}\right]$	$a + 2b - c$.

CAPUT QUARTUM.

De Natura, & variis Transformationibus Fractionum.

29. *Fractio* est quantitas, quæ cujuspiam *totius* partes, unam, vel plures significat. e. g. Unus crucifer est fractio comparate ad grossum: quia significat unam tertiam grossi partem. Porro ad determinandum cujuspiam fractionis valorem opus est duabus quantitatibus, quarum alter *denominator* fractionis, alter ejusdem *numerator* vocatur. *Denominator* exprimit, in quotnam partes dividi concipiatur *totum* illud, de cujus fractione fermo est; *numerator* autem indicat, quotnam ejusmodi partes fractio contineat. Id est, *denominator* exprimit, cujusnam *speciei*, *denominationisque* sint partes illæ, quas fractio in se continet, an nempe sint tertiæ, vel quartæ, vel decimæ &c. partes *totius*; *numerator* autem indicat, quotnam ejusmodi partes fractio valeat. Solet autem denominator subscribi numeratori lineola interjecta, e. g. $\frac{2}{3}$ significat duas tertias cujuspiam *totius* partes.

30.

30. THEOREMA III. *Si manente eodem denominatore crescat numerator; valor fractionis augetur: & quidem ea ratione augetur, qua ipse numerator, ita ut numeratore in duplum, aut triplum &c. crescente valor quoque fractionis in duplum, aut triplum &c. crescat. Ex adverso, si manente eodem denominatore numerator decrescat; valor fractionis imminuitur: & quidem eadem ratione imminuitur, qua ipse numerator, ita ut, si numerator duplo, aut triplo &c. minor evadat, ac prius fuerit, etiam valor fractionis duplo, aut triplo minor fiat.*

DEMONSTRAT. 1*mæ partis.* Quamdiu manet idem denominator, tamdiu perdurat eadem species, denominatioque partium illarum, quas fractio exprimit: ergo, si manente eodem denominatore crescat numerator, fractio jam plures ejusdem speciei partes continet, ac prius continuerit; & quidem ita, ut numeratore in duplum, aut triplum &c. crescente fractio jam duplo, aut triplo &c. plures ejusdem speciei partes contineat, ac prius continuerit. Atqui istud tantundem sane est, ac eadem prorsus ratione crescere valorem fractionis, qua numerator ejusdem crescit.

DEMONSTR. 2*dæ partis.* Si enim manente eodem denominatore numerator decrescat; fractio jam pauciores ejusdem speciei partes continet, quam continuerit prius: & quidem ita, ut si numerator duplo, aut triplo &c. minor evadat, fractio jam duplo, aut triplo &c. pauciores ejusdem speciei partes contineat, quam prius continuerit. Quod tantundem utique est, ac eadem prorsus ratione imminui valorem fractionis, qua numerator ejusdem imminuitur.

31. COROLL. Quodsi ergo duæ fractiones eundem habuerint denominatorem; ejus fractionis major est valor, cujus numerator fuerit major. e. g. $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$.

32. THEOREMA IV. *Si manente eodem numeratore crescat denominator; valor fractionis imminuitur: & quidem eadem ratione imminuitur, qua ratione denominator crescit, ita ut denominatore in duplum, aut triplum &c. crescente valor fractionis duplo, aut triplo minor evadat. Ex adverso, si manente eodem numeratore decre-*

decrefcat denominator; valor fractionis augetur: & quidem eadem ratione augetur, qua denominator decrefcit, ita ut fi denominator duplo, aut triplo &c. minor evadat, ac prius fuerit, valor fractionis in duplum, aut triplum &c. crefcat.

Demonstr. *1mæ partis.* Si manente eodem numeratore denominator crefcat; fractio totidem quidem partes fui *totius* continet, quot prius; at fingulas eo jam minores, quam prius, quo denominator ille magis creverit: ita ut denominatore in duplum, aut triplum &c. crefcente, quælibet earum partium, quas numerator fignificat, jam duplo, aut triplo &c. minor fit, ac prius fuerit. Sic quælibet $\frac{1}{4}$ pars totius eft duplo minor, ac fit quælibet $\frac{1}{2}$ pars; quælibet $\frac{1}{6}$ pars eft triplo minor, ac fit quælibet $\frac{1}{2}$ pars, & fic porro. Eo ipfo autem manifeftum fane eft, valorem fractionis decrefcere debere, fi manente eodem numeratore denominator crefcat, & quidem eadem ratione debere decrefcere, qua denominator crefcit.

Demonstr. *2dæ partis.* Si manente eodem numeratore denominator decrefcat; fractio totidem quidem partes fui *totius* continet, quot prius; at eo jam majores fingulas, quam prius, quo denominator ille magis decreverit: ita ut, fi denominator duplo, aut triplo &c. minor fiat, quælibet earum partium, quas numerator fignificat, jam duplo, aut triplo &c. major evadat, ac prius fuerit. Sic quælibet $\frac{1}{2}$ pars eft duplo major, ac fit quælibet $\frac{1}{4}$ pars ejusdem *totius*. Eo ipfo autem clarum utique eft, valorem fractionis crefcere, fi manente eodem numeratore denominator decrefcat, & quidem eadem ratione crefcere, qua denominator decrefcit.

33. Coroll. Quodfi ergo duæ fractiones eundem habeant numeratorem; ejus fractionis major eft valor, cujus denominator fuerit minor. e. g. $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$.

34. Si totum quodpiam in tres e. g. partes æquales, adeoque in meras partes *tertias* dividi concipiatur; utique tres id genus partes fimul fumptæ adæquant ipfum *totum* (*Arith.* 35): fimiliter, fi totum quodcunque in meras *quartas* partes dividi concipiatur; quatuor

tuor id genus partes simul sumptæ æquales sunt ipsi toti, & sic porro. Ergo generatim, si numerator fractionis sit æqualis denominatori; id genus fractio est æqualis ipsi toti. Sic $\frac{3}{3}$ vel $\frac{4}{4}$ partes unius floreni adæquant ipsum florenum integrum. Porro id genus *totum*, cujus partes fractio exprimit, per modum *unius* consideratur, ita ut, dum aliqua fractio dicitur esse æqualis, major, aut minor unitate, nomine *unitatis* intelligatur ipsum *totum*, cujus partes ea fractio repræsentat. Itaque fractio, cujus numerator est æqualis denominatori, est $= 1$. Hinc, quoniam manente eodem denominatore valor fractionis eo major, aut minor est, quo major, aut minor est numerator (32); clarum est, eam fractionem, cujus numerator major est denominatore, majorem esse unitate, eam vero esse unitate minorem, cujus numerator minor est denominatore. e. g. Eo ipso, quod sit $\frac{3}{3} = 1$ est $\frac{4}{3} > 1$, & $\frac{2}{3} < 1$.

35. Coroll. I. Fractio, quæ est æqualis, aut major unitate, vocatur fractio *impropria*; fractio autem *genuina* est, quæ minor est unitate: igitur fractio *impropria* est, cujus numerator est æqualis, aut major denominatore, *genuina* vero, cujus numerator est denominatore minor. e. g. $\frac{4}{3}$ est fractio *impropria*; at $\frac{2}{3}$ est *genuina*.

36. Coroll. II. Cum valor fractionis manente eodem denominatore ita crescat, aut decrescat, uti crescit, aut decrescit numerator; quemadmodum fractio tunc æqualis est unitati, quum numeratorem habet denominatori æqualem, ita tunc æquivalet duabus, tribus &c. unitatibus, quum ejus numerator est duplo, triplo &c. major denominatore. Hinc generatim valorem fractionis indicat quotus ille, qui enascitur numeratore per denominatorem diviso. e. g. Fractio $\frac{8}{2}$ est $= 4$; quia si numerator 8 per denominatorem 2 dividatur, quotus est $= 4$: item $\frac{2}{3}$, seu duæ tertiæ sunt ille ipse quotus, qui prodit, si 2 per 3 dividatur. Atque hæc est ratio, cur eodem modo soleamus scribendo ex-

exprimere e. g. & 2 *divisum per* 3, & *duas tertias*; scilicet utrumque hoc signo: $\frac{2}{3}$.

37. Coroll. III. Si divisor & dividendus iisdem signis gaudeant, quotus est *positivus* (24); *negativus* autem, si divisor & dividendus contraria signa habeant sibi præfixa (26). Cum ergo quævis fractio sit ille ipse quotus, qui enascitur numeratore per denominatorem diviso; valor fractionis positivus est, si tam numerator, quam denominator iisdem signis, sive positivis, sive negativis afficiuntur: negativus autem, si numerator, & denominator contraria signa habeant.

38. Coroll. IV. Quævis quantitas integra æquivalet ei fractioni impropriæ, cujus numerator sit eadem illa quantitas, denominator autem unitas. e. g. Est $3 = \frac{3}{1}$. Si enim numerator 3 per denominatorem 1 dividatur, quotus est $= 3$. Eodem modo patet esse $4 = \frac{4}{1}$

$$a = \frac{a}{1} \text{ \&c.}$$

39. THEOREMA V. *Si fractionis cujuspiam tam numerator, quam denominator per idem multiplicetur; valor ejusdem non mutatur. Pariter non mutatur valor fractionis, si ejus tam numerator, quam denominator per idem dividatur.*

Demonstr. *1mæ partis.* Multiplicetur e. g. per 2 tam numerator, quam denominator cujuspiam datæ fractionis. Si imprimis numerator per 2 multiplicetur; hac multiplicatione valor fractionis in duplum augetur (30): si deinde denominator per eundem numerum 2 multiplicetur, hac multiplicatione valor ejusdem fractionis duplo minor efficitur (32). Ergo quum tam numerator, quam denominator fractionis cujuspiam per eundem numerum 2 (vel per quemcunque alium) multiplicatur, tantundem augetur ejus valor ex una parte, quantum ex alia parte imminuitur. Eo ipso autem clarum est, non mutari valorem fractionis, si ejus tam numerator, quam denominator per idem multiplicetur.

Demonstr. *2dæ partis.* Dividatur e. g. per 2, tam numerator, quam denominator cujuspiam datæ fractionis.

nis. Si imprimis numerator per 2 dividatur; hac divisione valor fractionis duplo minor efficitur (30. *per 2dam partem theor.*): si deinde denominator per eundem numerum 2 dividatur; hac divisione valor ejusdem fractionis in duplum augetur (32. *per 2dam partem theor.*): ergo quum tam numerator, quam denominator fractionis cujuspiam per eundem numerum 2 (vel per quemcunque alium) dividitur, tantundem imminuitur ex una parte, quantum ex alia parte augetur. Eo ipso autem clarum est, non mutari valorem fractionis, si ejus tam numerator, quam denominator per idem dividatur.

40. Coroll. I. Quodsi ergo numerator fractionis per majorem quantitatem multiplicetur, quam denominator; valor fractionis ex una parte magis augetur, quam imminuatur ex parte altera: eo ergo casu valor ejusdem fractionis reapse augetur. Ex adverso, si numerator fractionis per minorem quantitatem multiplicetur, quam denominator; valor fractionis ex una parte minus augetur, quam imminuatur ex parte altera: consequenter valor ejusdem fractionis reapse imminuitur.

41. Coroll. II. Si numerator per majorem quantitatem dividatur, quam denominator; valor fractionis ex una parte magis imminuitur, quam augeatur ex parte altera: tunc ergo valor ejusdem fractionis reapse imminuitur. Ex adverso, si numerator per minorem quantitatem dividatur, quam denominator; valor fractionis ex una parte minus imminuitur, quam augeatur ex parte altera: consequenter valor ejusdem fractionis reapse augetur.

42. Duæ, aut plures fractiones, quæ eundem habent denominatorem, tametsi numeratores ipsarum diversi sint, inter se comparatæ vocantur *homogeneæ*, item *ejusdem denominatoris*. Sic *homogeneæ* fractiones sunt: $\frac{1}{4}$ & $\frac{3}{4}$; $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{b}$; $\frac{bc}{dm}$ & $\frac{ef}{dm}$. &c.

Ex adverso fractiones *heterogeneæ*, seu *diversi denominatoris* sunt, quæ non habent eundem denominatorem. e. g. $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ &c.

43. PROBLEMA VI. *Datas quotcunque fractiones heterogeneas reducere ad eundem communem denominatorem, seu convertere in homogeneas, quin prior earundem valor immutetur.*

Resolut. Sint e. g. tres hæ fractiones heterogeneæ $\frac{a}{b}$ $\frac{c}{d}$ & $\frac{m}{o}$ reducendæ ad communem denominatorem. Imprimis omnes denominatores multiplicentur inter se: factum enascens bdo erit communis denominator. Deinde cujuslibet fractionis numerator multiplicetur per omnes reliquarum fractionum denominatores, non tamen per proprium; tum facta enascentia scribantur pro novis numeratoribus. Sic in assumpto exemplo, primæ fractionis numerator a multiplicetur per denominatores d & o, & factum ado scribatur pro novo numeratore primæ fractionis. Similiter numerator c ducatur in denominatores b & o, factumque bco scribatur pro numeratore novo secundæ fractionis &c. Hoc pacto tres illæ fractiones heterogeneæ abibunt in has tres novas homogeneas: $\frac{ado}{bdo}$, $\frac{bco}{bdo}$, $\frac{bdm}{bdo}$; & tamen quælibet fractio priorem valorem suum accurate retinebit, quod sic ostendo. Quando denominatores omnes inter se multiplicati sunt, & factum pro novo primæ fractionis denominatore scriptum est, reapse prior primæ fractionis denominator per denominatores omnium reliquarum est multiplicatus: at etiam numerator ejusdem primæ fractionis multiplicatus est per denominatores omnium reliquarum, & factum isthoc est pro novo numeratore scriptum: ergo prima fractio $\frac{a}{b}$ haud aliter abivit in novam $\frac{ado}{bdo}$, quam quatenus tam numerator ipsius, quem etiam denominator per idem

idem eſt multiplicatus, nempe per do. Atqui valor fractionis prorſus non mutatur, ſi ejus tam numerator, quam denominator per idem multiplicetur (39.); ergo prima fractio abeundo in novam, prorſus ejusdem, ac prius, valoris manet. Simili ratione patet, neque ſecundæ, aut tertiæ fractionis valorem eſſe dicta operandi ratione immutatum.

Schol. Compendii gratia, communis denominator ſemel duntaxat ſubſcribitur numeratoribus reductis. e. g. Fractiones modo reductæ ſic ſcribuntur:

$$\frac{ado,\ bco,\ bdm}{bdo.}$$

EXEMPLA *Hujusm. Reduction.*

I. *Reducend.* $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$.
Reduct. $\frac{5,\quad 6}{15.}$

II. *Reducend.* $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$.
Reduct. $\frac{15,\quad 20,\quad 18}{30.}$

III. *Reducend.* $\frac{2a^m}{3c}$, $\frac{c^2 b}{2a^2}$
Reduct. $\frac{4a^{m+2},\quad 3c^3 b}{6a^2 c.}$

44. PROBLEMA VII. *Invenire, utra ſit majoris valoris ex datis duabus heterogeneis fractionibus.*

Resolut. Datæ fractiones heterogeneæ reducantur ad eundem denominatorem (43): cujus major fuerit numerator, ea erit majoris valoris (31). Si autem idem fuerit utriusque numerator, idem erit utriusque valor. e. g. Si fractiones $\frac{1}{3}$ & $\frac{2}{5}$ reducantur ad eundem denominatorem; abeunt in has: $\frac{5}{15}$ & $\frac{6}{15}$. Eſt ergo poſterior priore major, ſeu eſt $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$.

45. PROBLEMA VIII. *Datam fractionem ad simpliciorem expressionem, seu ad minorem numeratorem, & denominatorem reducere, quin prior ejus fractionis valor immutetur.*

Resolut. Si per aliquam quantitatem exacte dividi possit tam numerator, quam denominator; per eam dividatur uterque. Hoc pacto termini fractionis imminuentur, & tamen prior ejusdem valor retinebitur (39). e. g. Fractionis $\frac{8}{12}$, tam numerator, quam denominator exacte dividi potest per 4; qua divisione peracta, fractio illa abit in hanc simpliciorem: $\frac{2}{3}$, quin prior ipsius valor immutetur. Quodsi termini fractionis per aliquam quantitatem unitate majorem (nam unitas nihil dividit) non possint exacte dividi; id genus fractio ad simpliciorem expressionem reduci nequaquam potest. e. g. Fractio $\frac{4}{7}$ non potest reduci ad expressionem simpliciorem; cum nullus sit numerus, qui tam numeratorem, quam denominatorem ejus exacte dividat.

46. Coroll. Itaque si e. g. abc per ad dividi debeat; quotus (literam a utrique termino communem omittendo) est $= \frac{bc}{d}$. Quippe quotum ex ea divisione oriundum exprimit fractio $\frac{abc}{ad}$ (27. Schol.): quæ fractio, si tam numerator abc, quam denominator ad dividatur per a, retento priore valore suo abit in hanc: $\frac{bc}{d}$. Item, si a^2bc^2 dividi debeat per abc^3; quotus (utrumque terminum per abc^2 dividendo est $= \frac{a}{c}$.

Schol. Divisor numeratori, & denominatori communis in literis facile perspicitur; at difficilius in numeris, præsertim paullo majoribus. Quare aliqua hanc in rem adjumenta subnectere non erit supervacuum. Scilicet 1) videatur, an non numerator exacte metiatur denominatorem: id enim si eveniat, fractionem ad simpliciorem expressionem reduces, per numeratorem dividen-

videndo tam ſe ipſum, quam etiam denominatorem. e. g. $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. 2) Si tam numerator, quam denominator fuerint numeri pares; uterque per 2 dividi poterit. e. g. $\frac{16}{28} = \frac{8}{14}$; & quia video, in hac quoque reducta fractione tam numeratorem, quam etiam denominatorem eſſe numerum parem, adhuc continuari poterit per 2 diviſio, eritque demum $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$. 3) Si tam numerator, quam denominator in fine zeros habuerint; poterunt dividi per 10, vel 100 &c. delendo utrobique unum vel duos &c. zeros. e. g. $\frac{10}{60} = \frac{1}{6}$. 4) Si tam numerator, quam denominator pro dextima nota habuerit numerum 5, aut alter numerum 5, alter zerum; ambo dividi poterunt per 5. e. g. $\frac{25}{55} = \frac{5}{11}$.

47. PROBLEMA IX. *Datam fractionem impropriam ad integra reducere.*

Resolut. Dividatur numerator per denominatorem: quotus exprimet datam fractionem ad integra reductam, vel ſine, vel cum aliqua genuina fractione remanente. Cujuslibet enim fractionis valorem indicat quotus ille, qui enaſcitur numeratore per denominatorem diviſo (36). e. g. $\frac{2a^2b}{a} = 2ab$; $\frac{12}{4} = 3$; $\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$ &c.

48. PROBLEMA X. *Datam quantitatem integram convertere in fractionem dati denominatoris.*

Resolut. Data quantitas integra multiplicetur per datum denominatorem, & facto idem denominator ſubſcribatur. e. g. Si data quantitas integra ſit $= a$, datus denominator $= b$; quæſita fractio erit $= \frac{ab}{b}$. Nam fractio hæc eſt dati denominatoris b: porro eandem fractionem eſſe æqualem datæ quantitati integræ a facile patet. Eſt enim imprimis quælibet integra quantitas $a = \frac{a}{1}$ (38): deinde tam numeratorem, quam denominatorem hujus fractionis multiplicando per datum

tum denominatorem b, acquiritur $\frac{ab}{b} = \frac{a}{1}$ (39): eſt ergo etiam $a = \frac{ab}{b.}$ Eodem modo, ſi e. g. numerus 4 convertendus ſit in fractionem, cujus denominator ſit 3; multiplicetur 4 per 3, & facto 12 ſubſcribatur idem denominator 3: quæſita fractio erit $\frac{12}{3}$ $= 4$.

49. THEOREMA XI. *Cujuscunque datæ quantitatis fractionem quamcunque invenire. e. g. Invenire* $\frac{2}{3}$ *partes alicujus quantitatis.*

Resolut. Quantitas data multiplicetur per numeratorem fractionis, & factum dividatur per ejusdem fractionis denominatorem: quotus enaſcens erit ipſa fractio quæſita. Quærantur enim e. g. $\frac{2}{3}$ partes cujuscunque quantitatis a. Quantitas hæc multiplicata per 2, & ſimul diviſa per 3, æquivalet $\frac{2}{3}$ ſui partibus, ſeu eſt $\frac{2a}{3} = \frac{2}{3}a$, quod ſi declaro. $\frac{2a}{3}$ eſt $\frac{1}{3}$ pars quantitatis $2a$: ſi enim quæcunque quantitas per 3 dividatur, utique pro quoto obvenit $\frac{1}{3}$ pars ejusdem quantitatis. Jam vero $\frac{1}{3}$ pars quantitatis $2a$ efficit $\frac{2}{3}$ partes quantitatis a, cum $2a$ ſit duplum quantitatis a: ergo $\frac{2a}{3} = \frac{2}{3}a$. Quæ demonſtrandi ratio cuilibet alteri particulari caſui æque applicari poteſt.

50. Coroll. Quodſi ergo e. g. $\frac{3}{5}$ partes quærantur de numero 60; multiplicetur 60 per 3, & factum $= 180$ per 5 dividatur: quotus $= 36$, partes quæſitas exprimet.

51. PROBLEMA XII. *Invenire, quoties data unitatis fractio in quacunque data quantitate contineatur.* e. g. *Fractio* $\frac{2}{3}$ *quoties in numero* 4 *contineatur.*

Resolut. Datam quantitatem multiplica per denominatorem datæ fractionis, tum factum divide per ejusdem fractionis numeratorem: hoc pacto quotum quæſitum

ſitum obtinebis. Sic ſi quæratur, quoties $\frac{2}{3}$ in 4 contineantur; 4 multiplica per 3, & factum $= 12$ divide per 2: quotus enaſcens $= 6$, indicat, fractionem $\frac{2}{3}$ in numero 4 ſexies contineri.

Demonstr. Quæratur enim, quoties e. g. $\frac{2}{3}$ partes unitatis contineantur in quacunque data quantitate a. Quoniam $\frac{1}{3}$ pars unitatis in qualibet unitate *ter* continetur (34); ſi quantitas a per denominatorem 3 multiplicetur, factum enaſcens $3a$, indicat, quoties $\frac{1}{3}$ pars unitatis contineatur in quantitate a. Poſtquam autem depreheudi, numerum tertiarum unitatis partium in quantitate a contentarum eſſe $= 3a$; ut innoteſcat quotiesnam duæ tertiæ unitatis partes in eadem quantitate a contineantur, utique $3a$ per numeratorem 2 dividere debeo: ut adeo numerus $\frac{2}{3}$ partium unitatis in quantitate a contentarum ſit $= \frac{3a}{2.}$ Hoc eſt, ſi quæratur, quoties unitatis fractio $\frac{2}{3}$ contineatur in quacunque quantitate a; quæſitus quotus erit æqualis quantitati a multiplicatæ per fractionis denominatorem, & ſimul diviſæ per ejusdem numeratorem. Quæ demonſtrandi ratio cuilibet alteri particulari caſui æque applicari poteſt, ac proinde legitimam eſſe probl. *reſolutionem* generatim evincit.

52. PROBLEMA XIII. *Datam quamcunque quantitatem quacunque ſui fractione, e. g. $\frac{1}{3}$ ſui parte mulctare.*

Resolut. Datæ fractionis numeratorem a denominatore ſubtrahe, & per horum differentiam multiplica datam quantitatem; tum factum enaſcens divide per denominatorem ejusdem fractionis datæ. e. g. Si numerus 30 mulctandus ſit $\frac{2}{5}$ ſui partibus; imprimis ſubtrahe 2 a 5. & per differentiam $= 3$ multiplica numerum 30, tum factum $= 90$ divide per 5: quotus enaſcens $= 18$ æquabitur numero 30 duabus quintis ſui partibus mulctato.

De-

DEMONSTR. Quoniam quæcunque data quantitas a eſt $= \frac{a}{1}$ (38) $= \frac{2a}{2} = \frac{3a}{3} = \frac{4a}{4}$ &c. (38); ſi ea quantitas 1) mulctanda ſit $\frac{1}{3}$ ſui parte, reſiduum erit $= \frac{2a}{3}$: ſi 2) mulctanda ſit $\frac{1}{4}$ ſui parte, reſiduum erit $= \frac{3a}{4}$: ſi 3) mulctari debeat $\frac{2}{5}$ ſui partibus, reſiduum eſt $= \frac{3a}{5}$ &c. Ex horum autem reſiduorum contemplatione clare ſane patet, tunc datam quantitatem aliqua ſui fractione mulctari, ſi multiplicetur per differentiam terminorum datæ fractionis, & per ejusdem fractionis denominatorem dividatur. Sic ſi quæcunque quantitas a mulctanda ſit $\frac{1}{3}$ ſui parte, reſiduum, uti diximus, eſt $= \frac{2a}{3}$: jam vero prorſus idem acquires, ſi datæ fractionis $\frac{1}{3}$, numeratorem a denominatore ſubtrahas, & per differentiam $= 2$ multiplices quantitatem a, tum factum $2a$ per ejusdem fractionis datæ denominatorem 3, dividas.

53. COROLL. Igitur datam quantitatem data ſui fractione mulctare tantundem eſt, ac eam quantitatem multiplicare per aliam novam fractionem, cujus novæ fractionis numerator ſit ipſa differentia terminorum datæ fractionis, denominator autem idem ſit cum denominatore ejusdem datæ fractionis. Sic ſi quantitas a mulctanda ſit $\frac{1}{3}$ ſui parte; re ipſa quantitas illa multiplicari debet per $\frac{2}{3}$: quo pacto acquiretur quantitas $\frac{2a}{4}$, æqualis quantitati a, $\frac{1}{3}$ ſui parte mulctatæ.

CAPUT

CAPUT QUINTUM.

De Additione, Subtractione, Multiplicatione, ac Divisione Fractionum.

54. PROBLEMA XIV. *Datas quotcunque fractiones addere.*

Resolut. Si fractiones ſunt homogeneæ; numeratores earum in unam ſummam addantur, tum ſummæ huic communis denominator ſubſcribatur. Si autem fractiones fuerint heterogeneæ; convertantur primum in homogeneas, ac deinde numeratores ipſarum, ut modo dictum eſt, in unam colligantur ſummam, huicque ſummæ communis denominator ſubſcribatur. e. g. Si addendæ ſint hæ fractiones homogeneæ: $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$; numeratoribus in unam ſummam collectis erit ſumma $= \frac{7}{6}$. Si autem addi debeant hæ e. g. fractiones heterogeneæ: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$; convertantur primum in has homogeneas, $\frac{12,\ 16,\ 6}{24}$ (43), tum numeratores in unam colligantur ſummam: erit ſumma fractionum $= \frac{34}{24}$.

Demonstr. Fractiones heterogeneas e. g. $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$ in unam ſummam addi non poſſe clarum eſt: nam ea ſumma neque partes dimidias, neque tertias denotaret. Itaque fractiones addendæ, ſi heterogeneæ ſunt, primum in homogeneas convertantur, oportet. Porro homogenearum fractionum ſummam acquiri, ſi numeratoribus in unam ſummam collectis communis denominator ſubſcribatur, perſpicuum eſt: quis enim non videt, e. g. unam quartam, & duas quartas efficere ſummam trium quartarum? Scilicet denominatores non indicant numerum partium, adeoque ſummam neque augent, neque imminuunt, ſed tantum indicant, cujusnam ſpeciei partes ſint illæ, quarum numerum numerator exprimit.

Schol.

Schol. Si fractiones integris quantitatibus adjunctæ fuerint; primum addantur integræ quantitates methodo consueta, tum fractiones methodo nunc descripta in unam colligantur summam. Quodsi summa fractionum fuerit fractio impropria; ea reducatur ad integra, numerusque integer reductione acquisitus summæ integrorum adjiciatur. e. g. Debeant in unam summam addi hi numeri: $2\frac{1}{2}$, $5\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. Imprimis summa integrorum est $= 7$. Deinde fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ convertantur in has homogeneas: $\frac{12,\ 16,\ 18}{24;}$ quarum summa est $= \frac{46}{24}$. Hæc summa, si ad integra reducatur (47), est $= 1\frac{22}{24}$; ex qua si integra unitas transferatur ad summam integrorum superius inventam, seu ad 7, summa totalis erit $= 8\frac{22}{24}$. At hæc fractio, utrumque ejus terminum per 2 dividendo, ad minores terminos reduci potest, id est, converti in hanc, $\frac{11}{12}$ (45): itaque totalis summa demum acquiritur $= 8\frac{11}{12}$.

55. PROBLEMA XV. *Datam fractionem ab altera subtrahere.*

Resolut. Reductis fractionibus ad eundem denominatorem, fractionis subtrahendæ numerator methodo consueta subtrahatur a numeratore alterius: residuo subscribatur communis denominator, hæcque nova fractio erit quæsitum residuum. e. g. Si $\frac{1}{4}$ subtrahi debeat a $\frac{2}{3}$; fractiones istæ convertantur in has homogeneas $\frac{8}{12}$, $\frac{3}{12}$. Porro subtrahendo numeratorem 3 a numeratore 8, residuus numerator est 5; cui si denominator communis subscribatur, acquiritur residuum quæsitum $= \frac{5}{12}$.

Schol. Examen additionis æque per subtractionem fit in fractionibus, ac in quantitatibus integris; examen vero subtractionis per additionem.

56. PROBLEMA XVI. *Datam fractionem per datum numerum integrum multiplicare, aut dividere.*

Reso-

Resolut. Si fractio per numerum integrum multiplicanda sit; sufficit solum numeratorem per integrum illum numerum multiplicare. e. g. $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$. Si autem fractio per numerum integrum dividenda sit; solus denominator ejus fractionis per numerum illum integrum multiplicetur. e. g. $\frac{2}{3} : 4 = \frac{2}{12}$.

Demonstrat. *1mæ partis.* Manente eodem denominatore valor fractionis ita crescit, uti crescit ejusdem numerator (30): ergo solum fractionis numeratorem per datum numerum integrum multiplicare tantundem est, ac fractionem per eundem numerum integrum multiplicare.

Demonstr. *2dæ partis.* Manente eodem numeratore valor fractionis ea ratione decrescit, qua crescit ejusdem denominator; ita ut, si denominator evadat duplo, triplo &c. major, valor fractionis ex adverso fiat duplo, triplo &c. minor (32): ergo solum fractionis denominatorem per datum numerum integrum multiplicare tantundem est, ac fractionem illam per eundem numerum integrum dividere.

57. PROBLEMA XVII. *Fractionem unam per alteram fractionem multiplicare.*

Resolut. Multiplicentur inter se numeratores datarum fractionum, & similiter denominatores inter se; tum factum numeratorum scribatur pro novo numeratore, factum vero denominatorum pro novo denominatore: nova hæc fractio erit ipsum *factum* ex multiplicatione fractionum enascens. e. g. Si $\frac{2}{3}$ multiplicari debeat per $\frac{3}{4}$; est *factum* $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Pariter, si $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$ inter se multiplicentur; *factum* est $= \frac{1}{8}$.

Demonstr. Sit e. g. fractio $\frac{2}{3}$ multiplicanda per $\frac{3}{4}$. Multiplicare quamcunque quantitatem tantundem est, ac eandem toties sumere, quot unitates in multiplicatore continentur (*Arith.* 41). Cum ergo in multiplicatore $\frac{3}{4}$, unitas ne semel quidem contineatur integra, sed tantum secundum tres quartas sui partes; fractionem $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$ multiplicare, est eandem ne semel

qui-

quidem ſumere integram, ſed ſumere tres duntaxat quartas ejus partes. Porro ſi tres quartas cujuscunque quantitatis partes ſumere vis: eas obtinebis, quantitatem illam primum per 3 multiplicando, deinde dividendo per 4 (49). Ergo etiam fractionis $\frac{2}{3}$ tres quartas partes acquires, ac proinde eam per $\frac{3}{4}$ multiplicabis, ſi eandem primum per diviſoris numeratorem 3 multiplicaveris, deinde vero per ejusdem diviſoris denominatorem 4 diviſeris. Atqui fractio $\frac{2}{3}$ per 3 multiplicatur, ſi ejus numerator multiplicetur per 3; & eadem fractio per 4 dividitur, ſi ejus denominator per 4 multiplicetur (56). Ergo $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ eſt $= \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12}$. Hoc eſt, aſſumptarum fractionum multiplicatio rite peragitur, ſi numeratores inter ſe, & pariter denominatores inter ſe multiplicentur, tum factum numeratorum pro novo numeratore, factum vero denominatorum pro novo denominatore ſumatur. Quæ demonſtrandi ratio cum alteri cuilibet particulari caſui æque applicari queat; veritas *reſolutionis* generatim patet.

58. Coroll. I. Igitur factum, quod enaſcitur ex multiplicatione fractionis unius per alteram, eſt fractio fractionis multiplicandæ, & quidem determinate ejusmodi fractio, quæ per multiplicatorem exprimitur. e. g. Factum $\frac{6}{12}$, ſeu $\frac{1}{2}$, quod enaſcitur ex multiplicatione fractionis $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$, eſt fractio fractionis multiplicandæ $\frac{2}{3}$, & quidem ejusmodi fractio, quam multiplicator $\frac{3}{4}$ exprimit. Hoc eſt, factum $\frac{1}{2}$ æquivalet tribus quartis partibus fractionis $\frac{2}{3}$: nam in eo facto fractio multiplicanda ne ſemel quidem poteſt integra contineri, ſed ſecundum tres duntaxat quartas ſui partes, uti ſuperius demonſtravimus. Unde patet generatim methodus inveniendi quamcunque fractionem cujuscunque datæ fractionis. e. g. Si cupis tres quartas partes obtinere fractionis $\frac{1}{3}$; multiplica $\frac{1}{3}$ per $\frac{3}{4}$: factum enaſcens $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ erit æquale tribus tertiis partibus fractionis $\frac{1}{3}$. Pariter, ſi cupis unam dimidiam partem fractionis $\frac{1}{2}$ obti-

obtinere; $\frac{1}{2}$ multiplica per $\frac{1}{2}$: factum $= \frac{1}{4}$ aequivalebit uni dimidiae parti fractionis $\frac{1}{2}$ &c.

59. COROLL. II. Quoniam tunc, quum una fractio genuina per alteram multiplicatur, fractio multiplicanda in facto ne semel quidem debet integra contineri; mirum videri non debet, quod factum ex multiplicatione duarum id genus fractionum enascens semper minus sit fractione multiplicanda.

60. PROBLEMA XVIII. *Fractionem unam per alteram fractionem dividere.*

RESOLUT. Divisor invertatur, ita ut ejus denominator abeat in numeratorem, & vicissim; post inversionem factam numeratores inter se; & denominatores itidem inter se multiplicentur: denique factum numeratorum sumatur pro novo numeratore, factum autem denominatorum pro novo denominatore. Nova fractio erit quotus quaesitus. e. g. Sit fractio $\frac{2}{3}$ dividenda per $\frac{3}{4}$. Invertatur divisor, ut abeat in hanc fractionem: $\frac{4}{3}$; tum fractiones $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{3}$ multiplicentur inter se, scilicet numeratoribus 2 & 4 inter se, & denominatoribus 3 & 3 itidem inter se multiplicatis. Factum $= \frac{8}{9}$ erit quotus quaesitus.

DEMONSTR. Sit e. g. fractio $\frac{2}{3}$ dividenda per $\frac{2}{6}$. Divisionem hanc instituere tantundem est, ac inquirere in quotum, qui indicet, quotiesnam fractio $\frac{2}{6}$ in $\frac{2}{3}$ contineatur (*Arith.* 50.). Jam vero, si inveniendum sit, quoties data fractio in quacunque data quantitate contineatur, haec quantitas data multiplicari debet per denominatorem datae fractionis, tum factum dividi per ejusdem fractionis numeratorem (51). Ergo etiam, ut inveniatur quotus, qui indicet, quotiesnam fractio $\frac{2}{6}$ in $\frac{2}{3}$ contineatur, fractio $\frac{2}{3}$ multiplicari debet per alterius denominatorem 6, tum per ejusdem numeratorem 2 dividi. Atqui tunc, quum fractio $\frac{2}{6}$ invertitur, & numeratores inter se, pariterque denominatores inter se multiplicantur, reapse fractio $\frac{2}{3}$ per 6 multipli-

catur, & factum enascens per 2 dividitur (56): hoc ergò pacto assumpta divisio rite peragitur. Quæ demonstrandi ratio cuilibet alteri particulari casui æquè applicari potest.

61. Coroll. Sæpe una fractio in altera bis, ter, aut etiam sæpius continetur: e. g. $\frac{1}{8}$ in $\frac{1}{2}$ continetur quater. Cum ergo quotus ope divisionis quæri solitus indicare debeat, quotiesnam divisor in dividendo contineatur; mirum videri non debet, si ex divisione fractionum sæpe prodeat quotus, qui sit numerus integer, aut fractio fractione dividenda major. Sic si $\frac{1}{2}$ dividi debeat per $\frac{1}{8}$; quotus est $= \frac{8}{2} = 4$.

Schol. 1. Si quæcunque quantitas integra a per datam fractionem dividi debeat; quantitas illa convertatur in fractionem sibi æquivalentem, seu in hanc: $\frac{a}{1}$; tum hæc fractio per aliam illam datam consueta fractionum methodo superius exposita dividatur. e. g. Si quantitas a dividi debeat per $\frac{3}{2}$, quotus est $= \frac{2a}{3}$.

Numerus 3 per $\frac{1}{2}$ divisus, dat quotum $\frac{3 \times 2}{1 \times 1} = 6$ &c.

Schol. 2. *Examen* multiplicationis per divisionem; divisionis per multiplicationem fit in fractis æque, ac in numeris integris.

Schol. 3. Demum his, duo adhuc theoremata adjicere juvat, quorum usus est in iis, quæ in Physica nostra de Catoptrica, & Dioptrica tradimus.

62. THEOREMA VI. *Ponamus tam numeratorem, quam etiam denominatorem cujuspiam fractionis augeri.* 1) *Si augmentum numeratoris tanta quantitas fuerit comparate ad numeratorem, quantum fuerit augmentum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si numerator dimidia sui parte, & etiam denominator dimidia sui parte augeatur; prior fractionis valor non mutatur.* 2) *Si augmentum numeratoris majus fuerit comparate ad numeratorem, ac sit augmentum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si numerator dimidia*

midia sui parte, denominator autem nonnisi tertia sui parte augeatur; valor fractionis crescit. 3) *Si augmentum numeratoris minus fuerit comparate ad numeratorem, ac sit augmentum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si numerator tertia sui parte, denominator autem dimidia sui parte augeatur; valor fractionis decrescit.*

Demonstr. Nam in 1mo *casu* reapse tam numerator, quam denominator per idem multiplicatur. e. g. Si tam numerator dimidia sui parte, quam etiam denominator dimidia sui parte augeatur; reapse uterque per $1 + \frac{1}{2}$ multiplicatur. Si enim quamcunque quantitatem a per $1 + \frac{1}{2}$ multiplices; enascitur factum $= a + \frac{1}{2} a$: hoc est, quantitas a una dimidia sui parte augetur. Jam vero si tam numerator, quam etiam denominator per idem multiplicetur; valor fractionis non mutatur (39).

In 2do *casu* per majorem numerum multiplicatur numerator, quam denominator: e. g. si numerator dimidia sui parte, denominator autem tertia duntaxat sui parte augeatur; ille per $1 + \frac{1}{2}$, iste vero per $1 + \frac{1}{3}$ duntaxat multiplicatur. Itaque in 2do *casu* per majorem quantitatem multiplicatur numerator, quam denominator: consequenter valor fractionis crescit (40).

In 3tio *casu* per minorem quantitatem multiplicatur numerator, quam denominator. Si enim numerator e. g. $\frac{1}{3}$ sui parte, denominator autem $\frac{1}{2}$ sui parte augeatur; numerator per $1 + \frac{1}{3}$, denominator autem per $1 + \frac{1}{2}$ multiplicatur. Hoc ergo casu valor fractionis decrescat, oportet (40).

63. Coroll. Assumamus fractionem $\frac{2}{4}$. 1) Si numeratorem hujus fractionis unitate, denominatorem autem numero 2 augeas, ut ea fractio abeat in hanc: $\frac{3}{6}$; prior ejusdem valor non mutatur. Quemadmodum enim 1 est dimidia pars numeratoris 2, ita 2 est dimidia pars denominatoris 4. 2) Si tam numeratorem, quam denominatorem assumptæ fractionis $\frac{2}{4}$ augeas unitate,

ut abeat in hanc: $\frac{3}{5}$; valorem ejus fractionis auges. Nam 1 est major quantitas comparate ad numeratorem 2, quam sit comparate ad denominatorem 4; est enim illius dimidia pars, hujus autem nonnisi pars quarta. 3) Si fractionis $\frac{2}{4}$ numeratorem unitate, denominatorem autem numero 3 augeas, ut ea fractio abeat in hanc: $\frac{3}{7}$; valorem ejusdem imminuis. Nam 1 est minor quantitas comparate ad numeratorem 2, ac sit 3 comparate ad denominatorem 4.

Schol. Esse imprimis $\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$, esse deinde $\frac{3}{5} > \frac{2}{4}$, denique esse $\frac{3}{7} < \frac{2}{4}$ facile deprehendes ea etiam methodo, quam n. 44. tradidimus.

64. THEOREMA VII. *Ponamus tam numeratorem, quam etiam denominatorem cujuspiam fractionis imminui.* 1) *Si decrementum numeratoris tanta quantitas fuerit comparate ad eundem numeratorem, quantum fuerit decrementum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si & numerator dimidia sui parte, & etiam denominator dimidia sui parte mulctetur; prior fractionis valor non mutatur.* 2) *Si decrementum numeratoris majus fuerit comparate ad numeratorem, ac fit decrementum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si numerator dimidia sui parte, denominator autem nonnisi tertia sui parte mulctetur; valor fractionis decrescit.* 3) *Si decrementum numeratoris minus fuerit comparate ad numeratorem, ac sit decrementum denominatoris comparate ad denominatorem, e. g. si numerator tertia sui parte, denominator autem dimidia sui parte mulctetur; valor fractionis crescit.*

DEMONSTR. Nam in *primo casu* reapse non aliud fit, quam quod tam numerator, quam denominator per eandem fractionem multiplicetur. Si enim uterque e. g. $\frac{1}{3}$ sui parte mulctetur; uterque re ipsa per fractionem $\frac{2}{3}$ multiplicatur, uti ex num. 53. intelligere licet. Valor ergo fractionis hoc in casu nequit immutari (39).

In *2do casu* pariter non aliud fit reapse, quam quod & numerator, & denominator per aliquam fractionem multiplicetur; at numerator per minorem, denominator per majorem. Si enim ponamus numeratorem e. g. dimi-

dimidia ſui parte, denominatorem autem tertia duntaxat ſui parte mulctari; numerator per $\frac{1}{2}$, denominator autem per $\frac{2}{3}$ multiplicatur (53). Hoc ergo caſu valor fractionis imminuitur (40).

In 3tio caſu rurſus tam numerator, quam denominator per aliquam fractionem multiplicatur; at numerator per majorem, denominator per minorem. e. g. Si numerator $\frac{1}{3}$ ſui parte, denominator autem dimidia ſui parte mulctetur; reapſe numerator per $\frac{2}{3}$, denominator autem per $\frac{1}{2}$ multiplicatur (53). Hoc ergo caſu valor fractionis reapſe augetur (40).

SECTIO SECUNDA.
DE QUANTITATUM POTENTIIS, ET RADICIBUS.

CAPUT PRIMUM.
De Quantitatum Radicibus, & Potentiis generatim.

65. *Factum*, quod oritur, ſi quantitas quæpiam ſemel, aut ſæpius per ſe ipſam multiplicetur, vocatur *Potentia*, vel *Dignitas*. Sic a^2 eſt potentia quantitatis a: item $16 = 4 \times 4$ eſt potentia numeri 4. &c. Ipſa multiplicatio quantitatis per ſe ipſam, vocatur ejusdem quantitatis *elevatio ad potentiam*.

66. Si quantitas ſemel duntaxat multiplicetur per ſe ipſam, dicitur elevari ad *2dam potentiam*, ſeu ad *quadratum*; ſi bis per ſe ipſam multiplicetur, elevatur ad *potentiam 3tiam*; ſeu ad *cubum*; ſi ter, ad *4tam*; & ſic porro. Ipſa quantitas, quæ elevatur, aut elevari poteſt ad quadratum, cubum, vel aliam quamcunque altiorem potentiam, *Radix*, vel etiam *Potentia prima* nuncupatur. e. g. Quantitas a eſt *radix*, cujus 2da

 po-

potentia, seu quadratum est a^2, potentia tertia, seu cubus est a^3, quarta potentia a^4, & sic porro. Si enim quantitatem a semel per se ipsam multiplices, enascitur factum $= a^2$: si eandem bis multiplices per se ipsam, id est, si, postquam ex prima multiplicatione acquisivisti factum a^2, hoc factum rursus per radicem a multiplices, acquiris factum $= a^3$: & sic porro.

67. Coroll. I. Quoniam 2da cujuscunque radicis a potentia est $= a^2$, 3tia $= a^3$, quarta $= a^4$, & sic porro; clarum est, per exponentem quantitatis accurate indicari gradum potentiæ illius, ad quam ea quantitas elevata sit. Hinc generatim a^m est ea quantitatis a potentia, quam exprimit exponens numericus tot unitatibus constans, quot unitates m in se continet. e. g. Si ponatur esse $m = 3$; a^m est potentia tertia, seu cubus quantitatis a.

68. Coroll. II. Si fractio ad aliquam potentiam evehenda sit; ejus numerator per se ipsum, & denominator itidem per se ipsum multiplicari debet. e. g. Quadratum fractionis $\frac{2}{3}$ est $= \frac{2 \times 2}{3 \times 3} = \frac{4}{9}$. Quævis enim quantitas tunc elevatur ad aliquam potentiam, quum per se ipsam multiplicatur (65): fractio autem tunc multiplicatur per se ipsam, quum ejus tam numerator per se ipsum, quam etiam denominator per se ipsum multiplicatur. Sic $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$ est utique $= \frac{2 \times 2}{3 \times 3}$ (57).

69. Radix comparate ad quadratum suum dicitur *radix quadrata*; comparate ad cubum suum dicitur *radix cubica*; comparate ad quartam potentiam *radix quarta*, & sic porro. Sic a comparate ad a^2 est radix quadrata; comparate ad a^3 est radix cubica: pariter 2 comparate ad 4 est radix quadrata, nam $2 \times 2 = 4$; comparate ad 8 est radix cubica, nam $2 \times 2 \times 2 = 8$.

70. Signum radicis quadratæ est $\sqrt[2]{}$, vel $\sqrt{}$; radicis cubicæ est $\sqrt[3]{}$, radicis quartæ est $\sqrt[4]{}$, radicis denique inde-

indeterminatæ eſt $\sqrt[n]{}$. Quantitas ſigno radicali inſcripta, uti eſt numerus 3 in ſigno radicis cubicæ, vocatur *exponens radicis*: ea vero quantitas, cui tale ſignum præfixum eſt, *quantitas radicalis* appellatur. e. g. $\sqrt[3]{ab^2}$ eſt quantitas radicalis, ſignificatque radicem cubicam quantitatis ab^2 inſtar cubi conſideratæ. Quando deſignanda eſt radix cujuſpiam complexæ quantitatis; id genus quantitas plerumque parentheſi includitur, tum præfigitur ipſi ſignum radicale. e. g. Radix cubica de quantitate complexa $a + b$ plerumque hoc modo ſcribitur: $\sqrt[3]{}(a + b)$; interdum vero hoc modo: $\sqrt[3]{a + b}$. Ipſæ etiam potentiæ quantitatum complexarum ſæpe *indicantur* duntaxat, hoc nempe modo: $(a + b)^2$; hoc eſt, quadratum quantitatis complexæ $a + b$: vel etiam hoc modo: $\overline{a + b}^2$.

71. Radix alia dicitur rationalis, alia irrationalis, alia denique imaginaria. Radix *rationalis*, ſeu *vera* eſt, quæ numeris exacte exprimi poteſt. e. g. Numerus 3 eſt *vera* radix quadrata numeri 9. Radix *irrationalis*, ſeu *ſurda* vocatur illa, quæ non poteſt numeris exacte exprimi, licet in lineis geometricis dari queat. e. g. Videbimus ſuo loco, radicem quadratam numeri 8, ſeu $\sqrt{8}$ lineis exprimi poſſe, tametſi numeris exprimi nequeat: itaque $\sqrt{8}$ eſt radix ſurda. Denique radix *imaginaria*, ſeu *impoſſibilis* illa eſt, quæ nec lineis, nec numeris exprimi poteſt. e. g. $\sqrt{-4}$ eſt radix imaginaria, ſeu impoſſibilis. Quippe impoſſibile eſt, ut ulla radix per ſe ipſam ſemel multiplicata det quadratum $= -4$. Vel enim $+2$, vel -2 deberet eſſe radix illa: atqui neutra hæc radix dat quadratum $= -4$; nam & $+2 \times +2$, & -2×-2 eſt $= +4$ (27. *Reg.* 4*ta*).

72. PROBLEMA XIX. *Datam potentiam monomiam ad aliam dati exponentis potentiam elevare. e. g. Quantitatem a^2 elevare ad cubum ſuum.*

Resolut. Exponens datæ potentiæ monomiæ multiplicetur per exponentem datum potentiæ quæſitæ: tum

tum factum scribatur pro novo exponente datæ potentiæ. e. g. Si a^2 elevari debeat ad cubum; exponens datæ potentiæ est $= 2$, exponens autem quæsitæ potentiæ, seu cubi est $= 3$: itaque 2 multiplicetur per 3, & factum $= 6$ adscribatur potentiæ a pro novo exponente: acquiretur quantitas a^6, quæ erit cubus datæ potentiæ a^2.

Demonstr. Quævis data potentia monomia repræsentari potest per a^m Porro quadratum potentiæ a^m est $= a^m \times a^m$, cubus $= a^m \times a^m \times a^m$, & sic deinceps. Jam vero est $a^m \times a^m \times a^{2m}$; $a^m \times a^m \times a^m = a^{3m}$. & sic porro (21. *Reg.* 4.): ergo si a^m ad 2dam potentiam elevari debeat, ejus exponens m per 2 multiplicari debet; si ad 3tiam, per 3; & sic deinceps. Hoc est, ejus exponens per datum quæsitæ potentiæ exponentem est multiplicandus.

73. Coroll. I. Si ergo quæcunque potentia a^m elevari debeat ad potentiam exponentis n; quæsita potentia erit $= a^{mn}$: si $a^{\frac{m}{n}}$ debeat elevari ad potentiam exponentis n; potentia quæsita erit $= a^{\frac{mn}{n}} = a^m$.

74. Coroll. II. Si data potentia monomia pluribus constet literis; cujuslibet literæ exponens multiplicandus est per datum quæsitæ potentiæ exponentem. e. g. Quantitas $a^m b r$ ad quadratum elevata, est $= a^{2m} b^2 r$: eadem quantitas elevata ad potentiam exponentis n, est $= a^{mn} b^n r^n$. Quippe quadratum ejus quantitatis est $= a^m b r \times a^m b r = a^{2m} b^2 r$, cubus autem $= a^m b r \times a^m b r \times a^m b r = a^{3m} b^3 r$, (21. *Reg.* 4.). Hoc est, ut data quantitas pluribus literis constans ad potentiam aliquam elevetur, per datum quæsitæ potentiæ exponentem singularum literarum exponentes multiplicari debent.

75. Coroll. III. Si quantitas algebraica monomia ad aliquam potentiam elevanda, habeat coefficientem numericum; is coefficiens pariter ad potentiam illam elevetur, est necesse. e. g. Quantitatis $2a^m$ quadratum est $= 4a^{2m}$, cubus $= 8a^{3m}$; scilicet etiam coefficientem 2 elevando ad quadratum, cubum. Nam $2a^m \times 2a^m$ est —

eſt $= 4a^{2m}$, & $2a^m \times 2a^m \times 2a^m = 8a^{3m}$ (21. *Reg.* 3*tia.*)

76. THEOREMA VIII. *Potentia habens pro exponente zerum eſt æqualis unitati.*

Demonstr. Omnis ejusmodi potentia repræſentari poteſt per a^0; eſſe vero $a^0 = 1$ ſic oſtendo. Si a^m dividatur per a^m, quotus eſt $= a^0$ (27. *Reg.* 3*tia*): atqui is quotus, qui ex hac diviſione enaſcitur, debet eſſe $= 1$, nam a^m in a^m ſemel continetur; eſt ergo $a^0 = 1$.

77. In libris Mathematicis occurrere ſolent quantitates algebraicæ habentes pro exponente quantitatem integram negativam, aut fractionem aliquam, jam poſitivam, jam negativam. Cujusmodi expreſſionum valores (quibus quidem expreſſionibus nos neque in hoc, neque in phyſicis opuſculis noſtris utemur) ſiquis noſſe deſiderat, ii ſic habent. I. Generatim $a^{\frac{m}{n}}$ eſt $= \sqrt[n]{a^m}$. Elevetur enim imprimis $\sqrt[n]{a^m}$ ad potentiam exponentis n, quæſita potentia utique erit $= a^m$: nam per $\sqrt[n]{a^m}$ non aliud ſignificatur, quam ea radix, quæ ſi elevaretur ad potentiam exponentis n, fieret $= a^m$. Elevetur deinde etiam $a^{\frac{m}{n}}$ ad eandem potentiam, ſcilicet exponentis n; quæſita potentia erit $= a^{\frac{mn}{n}}$ (73), ſeu erit rurſus $= a^m$ (45). Atqui nequiret ſane utriusque radicis potentia n eſſe eadem, niſi radices illæ eſſent æquales, hoc eſt, niſi eſſet $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Unde hæc generalis regula fluit: *Si quæcunque quantitas $a^{\frac{m}{n}}$ habens pro exponente fractionem poſitivam exprimi debeat ope ſigni radicalis, quin prior ipſius valor immutetur; ſolus numerator fractionis relinquatur ei potentiæ pro exponente, denominator autem ejusdem fractionis ſigno radicali pro exponente radicis inſcribatur.*

 Hinc

Hinc e. g. $a^{\frac{2}{3}}$ eſt $= \sqrt[3]{a^2}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$ ſeu $= a$ (70).

78 II. Eſt generatim $ba^{-m} = \frac{b}{a^m}$. Multiplicetur enim ba^{-m} per a^m; factum erit $= ba^{-m+m} = ba^0$ (27. *Reg.* 3*tia*), ſeu ob $a^0 = 1$ (76), factum erit $= b$. Deinde multiplicetur etiam $\frac{b}{a^m}$ per idem a^m; factum erit $= \frac{ba^m}{a^m}$ (56) $= b$ (45). Ergo idem factum b prodit, ſive ba^{-m}, ſive $\frac{b}{a^m}$ multiplicetur per a^m. Atqui iſtud evenire utique non poſſet, niſi eſſet $ba^{-m} = \frac{b}{a^m}$. Unde hæc generalis lex eruitur: *Si quæcunque potentia, habens pro exponente quantitatem integram negativam exprimi debeat cum exponente poſitivo, quin prior ipſius valor immutetur; ejus quantitatis coefficiens ſumatur pro numeratore fractionis, pro denominatore autem ſumatur eadem illa quantitas cum priore ſuo exponente, ſed jam poſitivo, non negativo.* Hinc eſt $2a^{-2} = \frac{2}{a^2}$; & $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, cum in a^{-m} nullus præter unitatem reperiatur alter coefficiens.

79. III. Eſt $\frac{b}{a^{-m}} = ba^m$. Nam eſt $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (78); ergo idem eſt, ſive per a^{-m}, ſive per $\frac{1}{a^m}$ dividatur quantitas b: atqui, ſi b dividatur per a^{-m}, quotus eſt $= \frac{b}{a^{-m}}$, ut clarum eſt, ſi autem idem b dividatur per $\frac{1}{a^m}$ quotus eſt $= ba^m$ (61. *Shol.*); eſt ergo $\frac{b}{a^{-m}} = ba^m$. Eodem modo oſtendi poteſt

eſſe

esse $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$.

80. IV. Est generatim $ba^{-\frac{m}{n}} = \frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$. Si enim imprimis quantitas $ba^{-\frac{m}{n}}$ elevetur ad potentiam n; erit quæsita potentia $= b^n a^{-\frac{mn}{n}}$ (74) $= b^n a^{-m} = \frac{b^n}{a^m}$ (78): si deinde quantitas $\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$ elevetur ad potentiam n; ejus fractionis tam numerator, quam denominator elevari debebit ad potentiam n (68), adeoque quæsita potentia erit $= \frac{b^n}{a^m}$. Ergo eadem acquiritur potentia quæsita, sive $ba^{-\frac{m}{n}}$, sive $\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$ elevetur ad potentiam n. Atqui istud evenire utique non posset, nisi esset $ba^{-\frac{m}{n}} = \frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}$; ergo. Sed, uti jam n. 77. innuimus, hæc a Tironibus nostris prætermitti posse existimamus.

CAPUT SECUNDUM.

De Extractione radicum e potentiis algebraicis.

81. *Radicem extrahere* e data potentia, est ex eadem eruere eam quantitatem, quæ aliquoties per se ipsam multiplicata potentiam illam generavit. e. g. Extrahere radicem quadratam ex a^6 est invenire quantitatem a^3, quæ semel per se ipsam multiplicata gignit quadratum $= a^6$: ex eadem quantitate a^6 extrahere radi-

radicem cubicam eſt invenire quantitatem a^2, quæ bis per ſe ipſam multiplicata dat cubum a^6. Hinc quadratum, cubus, aliæque altiores potentiæ, ſicuti *multiplicatione* naſcuntur, ita *diviſione* diſſuuntur, ſuasque in radices reſolvuntur.

82. PROBLEMA XX. *E data potentia monomia radicem quamcunque extrahere.*

Resolut. Exponens datæ potentiæ dividatur per exponentem datæ radicis; quotus, qui enaſcetur, erit exponens radicis quæſitæ. e. g. Si ex a^6 extrahenda ſit radix quadrata; quoniam exponens radicis quadratæ eſt $= 2$ (67), dividatur exponens 6 per 2, & quotus 3 erit exponens radicis quæſitæ, hoc eſt, radix quæſita erit $= a^3$. Si ex $a^4 b^2$ radix quadrata extrahenda ſit, dividantur exponentes per 2, & erit radix quæſita $= a^2 b$. Radix cubica quantitatis a^6 (exponentem per 3 dividendo) eſt $= a^2$. Radix cubica quantitatis $a^6 b^3 = a^2 b$, & ſic porro. Scilicet, quemadmodum data radix monomia ad datam potentiam elevatur *multiplicando* ejus exponentem per exponentem datæ potentiæ (72), ita ex adverſo, ut ex data potentia monomia extrahatur radix dati exponentis, exponens potentiæ per exponentem radicis *dividatur*, eſt neceſſe (81). Et ſane radix hac methodo inventa, ſi per ſe ipſam multiplicetur (nempe quadrata ſemel, cubica bis &c.), ſemper reſtituit datam potentiam: ac proinde radix hac methodo inventa, genuina radix ſit, oportet.

83. THEOREMA IX. *Quodlibet quadratum radicis binomiæ conſtat* 1) *quadrato termini primi radicis ſuæ,* 2) *duplo ejusdem termini primi per terminum ſecundum multiplicato,* 3) *quadrato termini ſecundi.*

Demonstr. Quævis radix binomia repræſentari poteſt, vel per $a + b$, vel per $a - b$: conſequenter (radices has elevando ad quadrata) quodlibet quadratum radicis binomiæ rite repræſentatur, vel per $a^2 + 2ab + b^2$, vel per $a^2 - 2ab + b^2$. Atqui conſideranti patet, utrumque iſtud quadratum conſtare 1) quadrato termini primi radicis ſuæ, 2) duplo ejusdem termini primi per terminum ſecundum multiplicato, 3) quadra-

dra-

drato termini fecundi; ergo quodlibet quadratum radicis binomiæ &c.

84. Coroll. Quæcunque polynomia radix quadrata ad binomiam reduci poteft, fi plures ejus notæ inftar unius termini confiderentur. Igitur cujusvis quadrati quamcunque polynomiam radicem habentis partes per alterutram formularum nunc allatarum exhiberi poffunt. e. g. Affumamus quadratum numericum, cujus radix tribus notis numericis conftans eft $= 132$. Quoniam eft $132 = 130 + 2$; fi ponatur $130 = a$, & $2 = b$, erit radix illa $= a + b$: ac proinde quadratum ipfum rite repræfentabitur per $a^2 + 2ab + b^2$.

85. PROBLEMA XXI. *E data potentia algebraica polynomia radicem quadratam extrahere.*

Resolut. Ordinetur data potentia fecundum exponentes cujusdam literæ, ita ut maximus exponens primo loco fit; tum præ oculis fit generalis quadratorum lex n. 83. demonftrata, quod nempe quodlibet quadratum radicis binomiæ conftet quadrato termini primi, duplo termini primi per terminum fecundum multiplicato, & quadrato termini fecundi: quam legem hæc formula generalis $a^2 + 2ab + b^2$ ob oculos polita non finet e memoria effluere. Porro operatio his peragatur legibus.

1mo. Cum in primo datæ, riteque ordinatæ potentiæ termino lateat quadratum termini primi radicis; extrahatur radix quadrata e primo termino, ea videlicet methodo, quam n. 82. tradidimus, & fcribatur pro primo radicis termino poft potentiam datam parenthefi inclufam. Deinde quadratum hujus radicis fubtrahatur à data potentia, & refiduum pro ultiore operatione refervetur.

2do. In refiduo hoc latebit adhuc duplum factum termini primi in fecundum ducti, item quadratum fecundi. Itaque hæc duo porro fiant: 1) Per duplum termini primi jam inventi dividatur aliquis refidui illius terminus, & quotus monomius fcribatur pro fecundo radicis termino. 2) Quotus ifte multiplicetur tam per fe ipfum, quam per duplum termini primi, feu per divifórem; & facta hæc a dicto refiduo fubtrahantur.

Quodfi

Quodſi poſt alteram hanc ſubtractionem nihil remanſerit ex data potentia; id argumento erit, eam fuiſſe perfectum quadratum radicis binomiæ, ejus nempe, quæ extracta jam eſt: hactenus enim ex data potentia nihil aliud ſubtractum eſt, quam partes quadrati. dictam radicem binomiam habentis. ſcilicet quadratum termini primi, duplum factum termini primi in ſecundum ducti, & quadratum termini ſecundi.

EXEMPLUM *harum Regularum.*

Sit *potentia data;* Erit ejus *radix quadrata.*

$(n^2 + 4n + 4)$ - - - - - - $n + 2$.

Scilicet imprimis per reg. 1*mam*, ex quadrato monomio n^2 extrahatur radix n, ſcribaturque pro primo quæſitæ radicis termino; tum ejus quadratum n^2 ſubtrahatur a data potentia: manebit reſiduum $= + 4n + 4$. Deinde juxta reg. 2*dam*, hujus reſidui terminus $4n$ dividatur per duplum termini jam inventi, ſeu per $2n$, & quotus $= + 2$ ſcribatur pro ſecundo quæſitæ radicis termino. Porro hic quotus, ſeu $+ 2$ multiplicetur tam per ſe ipſum, quam etiam per diviſorem $2n$, & factum $= + 4n + 4$ ab eo reſiduo ſubtrahatur. Poſt alteram hanc ſubtractionem nihil remanet amplius e data potentia: unde patet, datam potentiam eſſe perfectum quadratum radicis binomiæ $n + 2$. Et ſane ſi hæc radix in ſe ipſam ducatur, non aliud enaſcitur quadratum, quam data illa potentia, ut periclitanti patebit.

3*tio*. Quodſi eveniat, ut poſt alteram quoque ſubtractionem aliquod reſiduum e data potentia remaneat; id indicio erit, radicem quæſitam tertio quoque termino conſtare, qui adhuc extrahendus ſuperſit. Quo caſu hoc modo procedendum eſt. Duo primi quæſitæ radicis termini per ſuperiores regulas jam inventi, inſtar unius accipiantur, habeanturque pro primo radicis quæſitæ termino, ille autem, qui adhuc latet, pro ſecundo. Hac facta hypotheſi, hactenus non plus ſubtractum eſt a data potentia, quam quadratum termini primi: adeoque in ejus reſiduo latet adhuc duplum factum termini primi (per *terminum primum* deinceps intelligendo ſummam duorum terminorum jam invento-

torum) in fecundum ducti, & quadratum termini fecundi (84). Itaque rurfus (ut in *2da* reg. dictum eft) hæc duo fiant: 1) Per duplum termini primi jam inventi dividatur aliquis refidui illius, quod adhuc remanfit, terminus, & quotus monomius fcribatur pro novo radicis termino. 2) Quotus ifte multiplicetur tam per fe ipfum, quam per duplum termini primi, & facta hæc a dicto refiduo fubtrahantur. e. g.

Sit *potentia data*, Erit *radix quadrata*
$(a^2 - 2a + 4ab + 4b^2 - 4b + 1)$ $a - 1 + 2b$.

Nimirum 1) per reg. *1mam*, ex quadrato monomio a^2 extrahatur radix quadrata a, fcribaturque pro primo quæfitæ radicis termino; tum ejus quadratum a^2 fubtrahatur a data potentia: manebit refiduum $= - 2a + 4ab + 4b^2 - 4b + 1$.

2) Per reg. *2dam*, hujus refidui terminus $- 2a$ dividatur per duplum termini jam inventi, feu per $2a$, & quotus $= - 1$ fcribatur pro fecundo radicis quæfitæ termino. Porro hic quotus, feu $- 1$ multiplicetur tam per fe ipfum, quam etiam per diviforem $2a$, & factum $= - 2a + 1$ fubtrahatur a refiduo fuperius adnotato. Poft hanc fubtractionem alteram adhuc remanet e data potentia refiduum $= + 4ab + 4b^2 - 4b$. Itaque

3) Per reg. *3tiam*, duo quæfitæ radicis termini hactenus inventi inftar unius accipiantur, & per eorum duplum, feu per $2a - 2$ dividatur poftremum ifthoc refiduum. Scilicet quæratur, quotiesnam primus divíforis terminus $2a$ contineatur in primo refidui dividendi termino $+ 4ab$ (28. *Reg. 1ma*), & quotus $= + 2b$ fcribatur pro novo radicis termino. Porro idem quotus $2b$ multiplicetur tam per fe ipfum, quam per integrum divíforem $2a - 2$, & factum $= 4ab - 4b + 4b^2$ ab eodem refiduo poftremo fubtrahatur. Poft tertiam hanc fubtractionem nihil amplius remanet e data potentia: ac proinde data potentia eft perfectum quadratum, cujus radix eft $= a - 1 + 2b$.

4to. Si poft tertiam quoque fubtractionem aliquod refiduum maneat e data quapiam potentia; id erit indicio, quartum quoque radicis terminum latere in ea po-

potentia. Itaque radix quatuor terminorum reducatur ad duos, ita ut pro primo termino accipiantur tres simul termini iam inventi; cetera autem peragantur ut ante. Si post hanc quoque operationem aliquod adhuc residuum superesset, in ulteriore operatione quatuor primi termini jam inventi pro uno accipiendi essent, & operatio constanter eadem, quam hucusque secuti sumus, lege deberet continuari, dum vel evanescat omne residuum, vel abeatur in seriem quandam infinitam.

5*to*. Si data potentia fuerit fractio; per easdem regulas radix tam e numeratore, quam etiam ex denominatore extrahi debebit (68. & 81).

EXEMPLA ALIA *Extract. Radix. Quadrat.*

I. *Quadratum*, $x^2 - x + \frac{1}{4}$. *Radix*, $x - \frac{1}{2}$.

II. *Quadrat.* $4a^4 + 12a^2b + 9b^2$. *Radix*, $2a^2 + 3b$.

III. *Q.* $x^2 + 2nx + n^2 - 4x - 4n + 4$. *Radix*, $x + n - 2$.

Schol. Legitime peractam esse operationem id evincet, si radix inventa per se ipsam multiplicata dederit ejusmodi quadratum, quod cum data potentia prorsus sit idem.

86. PROBLEMA XXII. *Invenire, quibus partibus constet cubus radicis binomiæ.*

Resolut. Id elucescet, si $a + b$ ad cubum elevetur. Est autem ejus cubus $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, uti patebit, si eam radicem bis per se ipsam multiplicaveris. Itaque cubus radicis binomiæ constat 1) cubo termini primi radicis suæ; 2) triplo facto quadrati termini primi in terminum secundum ducti; 3) triplo facto termini primi in quadratum secundi ducti; 3) cubo termini secundi.

Schol. Extractione radicis cubicæ ex quantitate polynomia sive algebraica, sive numerica neque in hoc, neque in physicis opusculis nostris utemur uspiam: methodum tamen eam extractionem peragendi, si quis nosse desiderat, in sequentibus adnotatam habet.

87. PROBLEMA XXIII. *E data potentia algebraica polynomia radicem cubicam extrahere.*

Reso-

Resolut. Ordinetur data potentia secundum exponentes cujusdam literæ, ita ut maximus exponens primo loco sit; tum ponatur ob oculos formula generalis $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, partes cubi binomiam radicem habentis repræsentans (86), & hæ denique regulæ observentur.

1mo. Ex inspectione formulæ generalis patet, in primo datæ, riteque ordinatæ potentiæ termino latere cubum termini primi quæsitæ radicis: itaque extrahatur radix cubica ex primo datæ potentiæ termino (82), & scribatur post datam potentiam parenthesi inclusam pro primo quæsitæ radicis termino. Deinde cubus hujus radicis nunc inventæ subtrahatur a data potentia, & residuum pro ulteriore operatione notetur.

2do. In hoc residuo latebit inter cetera triplum factum quadrati termini primi nunc inventi in secundum radicis terminum ducti; quod factum in generali formula per $3a^2 b$ repræsentatur. Itaque si ex termino primo nunc invento fiat quadratum, & per triplum hujus quadrati dividatur primus rite ordinati residui terminus, pro quoto obveniet secundus quæsitæ radicis terminus, priori post potentiam datam parenthesi inclusam addendus. Porro triplum quadratum termini primi multiplicetur per terminum secundum nunc inventum, deinde triplum quadratum secundi hujus termini multiplicetur per terminum primum, denique idem terminus secundus elevetur ad cubum, & facta hæc a residuo superius notato subtrahantur. Hoc pacto totus jam radicis binomiæ hactenus inventæ cubus (& nihil aliud) subtractus est a data potentia, uti formulæ generalis contemplatio palam facit. Hinc si post alteram hanc subtractionem nihil amplius remaneat e data potentia; id argumento erit, eam potentiam esse perfectum cubum radicis binomiæ, ejus nempe, quæ extracta jam est.

EXEMPLUM *harum Regularum.*

Sit *potentia data* | Erit ejus *radix cubica.*

$(8x^6 - 12x^4 n + 6x^2 n^2 - n^3)$ | $2x^2 - n$.

Sci-

Scilicet imprimis per reg. *1mam*, ex primo datæ, riteque ordinatæ potentiæ termino $8x^6$ extrahatur radix cubica $2x^2$ ($8 2$), scribaturque pro primo quæsitæ radicis termino; tum ejus cubus $8x^6$ subtrahatur a data potentia: manebit residuum $= - 12x^4 n + 6x^2 n^2 - n^3$.

Deinde juxta reg. *2dam*, hujus residui terminus $- 12x^4 n$ dividatur per triplum quadratum primi quæsitæ radicis termini nunc inventi, seu per $12x^4$, & quotus $= - n$ scribatur pro secundo radicis termino. Porro hic quotus multiplicetur per triplum quadratum termini primi, seu per divisorem, deinde triplum quadratum ejusdem quoti, seu termini secundi ducatur in terminum primum, denique idem terminus secundus elevetur ad cubum, & facta hæc $= - 12x^4 n + 6x^2 n^2 - n^3$ a residuo superius notato subtrahantur. Post alteram hanc subtractionem nihil jam remanet e data potentia; evidenti argumento, eam fuisse perfectum cubum radicis binomiæ $2x^2 - n$. Et sane, si hæc radix bis in se ipsam ducatur, non alius enascerur cubus, quam data illa potentia, uti periclitanti patebit.

3tio. Quodsi eveniat, ut post alteram quoque subtractionem aliquod residuum e data potentia remaneat; indicio erit, radicem quæsitam tertio quoque termino constare. Quo casu hoc modo procedendum porro est. Duo primi quæsitæ radicis termini, per superiores regulas jam inventi, instar unius accipiantur, habeanturque pro primo quæsitæ radicis termino: ille autem, qui adhuc latet, pro secundo. Hoc stante hactenus non plus subtractum est a data potentia, quam cubus termini primi: adeoque in ejus residuo latet adhuc triplum quadratum termini primi (per *terminum primum* deinceps intelligendo summam duorum terminorum jam inventorum) in secundum ducti, triplum quadratum termini secundi adhuc latentis multiplicatum per terminum primum, & cubus ejusdem termini secundi. Itaque rursus (ut in reg. *2da* dictum est) hæc duo fiant: Imprimis ex termino primo (seu ex summa duorum terminorum jam inventorum) fiat quadratum, & per triplum hujus quadrati dividatur sequens residui rite ordinati terminus; tum quotus enascens scribatur pro

novo

novo radicis termino. Deinde triplum quadratum termini primi, seu divisor ducatur in terminum secundum nunc inventum, triplum autem quadratum termini secundi ducatur in terminum primum, denique terminus secundus elevetur ad cubum; tum facta hæc a residuo illo, quod post alteram subtractionem remansit, subtrahantur.

4to. Si post tertiam quoque subtractionem aliquod residuum e data potentia manserit, id erit indicio, quartum quoque radicis terminum latere in data potentia. Itaque radix quatuor terminorum reducatur ad duos, ita ut pro primo termino accipiantur tres simul termini jam inventi; cetera autem peragantur, ut ante.

5to. Si data potentia fuerit fractio; per easdem regulas radix cubica tam e numeratore, quam etiam e denominatore extrahenda erit (68, & 81).

Schol. Consideranti facile patet, methodum extrahendi radicem cubicam congruere cum methodo extrahendi radicem quadratam; hoc uno discrimine, quod in extractione radicis quadratæ formula $a^2 + 2ab + b^2$ doceat, quorum divisorum ope inveniendi sint termini radicis, & quæ subtractio instituenda sit invento quovis termino radicis, in cubicæ autem radicis extractione formula $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$ præluceat.

CAPUT TERTIUM.

De Extractione Radicum e numeris.

88. Pro extrahenda radice quadrata, vel cubica e numeris simplicibus in promptu esse debet tabula sequens; in qua series prima est radicum, altera quadratorum iis respondentium, tertia vero cuborum.

Radices,	*Quadrata,*	*Cubi.*
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

89. Si e quadrato numerico, cujus radix duabus, aut pluribus notis numericis conſtet, radix extrahenda ſit; reapſe eædem regulæ, quæ in extractione radicis quadratæ polynomiæ e potentiis algebraicis (85), obſervandæ ſunt, & eadem formula generalis $a^2 + 2ab + b^2$, quadrati partes exhibens præ oculis habenda eſt, qua illic uſi ſumus: hoc tamen diſcrimine, quod partes quadrati, quas generalis illa formula exhibet, non æque incurrant in oculos in quadratis numericis, ac in algebraicis, ſed in iis veluti confuſæ, & permixtæ lateant. Itaque præter regulas n. 85 allatas aliis adhuc regulis opus eſt in extractione radicis quadratæ numericæ, in quibus ſtatuendis ſequentes animadverſiones facem nobis præferent.

90. *Animadverſio 1ma.* Imprimis, ſi datum quadratum numericum unica, vel duabus tantum notis numericis conſtet; ejus radix nonniſi unica nota conſtabit, quæ proinde in Tabula n. 88 allata quæri debebit: nam minima radix quadrata, quæ duabus notis conſtet, eſſe poteſt numerus 10; hujus autem quadratum = 100 jam trium notarum eſt. Deinde, ſi datum quadratum tres, vel quatuor notas complectatur; ejus radix eſt duarum notarum. Nam maxima duarum no-

notarum radix eſt 99, cujus quadratum = 9801 ultra quatuor notas non aſſurgit: & minima trium notarum radix 100 gaudet quadrato = 10000, jam ad quinque notas aſſurgente. Denique, ſi datum quadratum quinque, vel ſex notarum ſit; ejus radix tribus notis conſtat. Nam maxima trium notarum radix eſt 999, cujus quadratum = 998001 ultra ſex notas non aſſurgit; & minima quatuor notarum radix 1000 habet quadratum = 1000000, jam ad ſeptem notas aſſurgens. Eadem methodo oſtendi poteſt, radicem quadrati ſeptem, vel octo notas complectentis conſtare quatuor notis; radicem quadrati novem, vel decem notas complectentis eſſe quinque notarum, & ſic porro.

91. Coroll. Quodſi ergo a dextris inchoando poſt binas quasque dati quadrati numerici notas inferatur virgula, ſeu *comma*; ejus radix tot notarum erit, quot fuerint in quadrato hujusmodi membra virgulis diſtincta. e. g. Radix quadrati 1, 74, 24 tribus notis conſtat.

92. *Animadverſio 2da.* Aſſumamus quodcunque quadratum numericum, in ſua membra virgulis ea lege, quam nunc (91) deſcripſimus, interjectis diſtributum, e. g. hoc: 5, 47, 56, cujus radix quadrata eſt = 234. 1) Siniſtimus radicis terminus 2, quoniam locum centenariorum occupat, eſt re ipſa = 200; adeoque ejus quadratum 4, eſt reapſe = 200 × 200 = 40000. Unde patet, quadratum illud latere in ſiniſtimo dati quadrati membro, quod membrum ſiniſtimus numerus 5 conſtituit. Eodem modo deprehenditur in quocunque alio quadrato numerico, quadratum ſiniſtimi termini radicis in ſiniſtimo quadrati membro contineri. 2) Secundus ejusdem radicis (ſemper a ſiniſtris ſumendo initium) terminus 3, decadum locum occupat, adeoque eſt re ipſa = 30. Hinc, quum duplum termini primi in ſecundum ducendo acquiris factum = 12, reapſe factum iſtud eſt = 400 × 30 = 12000: conſequenter factum iſtud = 12 terminatur in ſecundo a ſiniſtris membro quadrati, & quidem in ſiniſteriore ejus membri nota: quippe terminatur in quarta a dextris nota, quæ in aſſumpto quadrato 5, 47, 56 eſt ſiniſterior ſecundi a ſiniſtris membri. Eodem modo de-

 pre-

prehendi poteſt in quocunque alio quadrato numerico, duplum termini primi radicis ductum in ſecundum terminari in ſiniſteriore ſecundi membri nota. 3) Quoniam ſecundus radicis aſſumptæ terminus 3, eſt re ipſa = 30, uti nunc oſtenſum eſt; ejus quadratum 9 eſt re ipſa = 30 × 30 = 900. Unde iſthoc quadratum pariter in ſecundo dati quadrati membro terminatur; at in dextima hujus membri nota. Idem eodem modo deprehenditur in quocunque alio numero quadratico.

93. Coroll. Quodſi ergo quodcunque datum quadratum numericum in membra ſua eo, quem n. 91 deſcripſimus, modo diſtribuatur; de ejus radice tres has leges generatim ſtatuere licet. 1) Quadratum primi, ſeu ſiniſtimi termini radicis latet in ſiniſtimo dati quadrati membro. 2) Duplum termini primi ductum in terminum ſecundum terminatur in ſecundo dati quadrati membro, & quidem in ſiniſteriore ejus membri nota. 3) Quadratum termini ſecundi terminatur pariter in ſecundo dati quadrati membro; at in dextima ejusdem nota.

94. *Animadverſio 3tia.* Si in aſſumpto ſuperius (92) quadrato numerico duæ ſiniſtimæ radicis notæ 23 pro primo ejusdem radicis termino ſumantur; ſequens autem nota 4 pro ſecundo; quoniam terminus 23 in eo quadrato eſt re ipſa = 230, duplum termini primi ductum in terminum ſecundum, ſeu 46 × 4 eſt re ipſa = 460 × 4 = 1840. Unde patet, factum illud terminari in tertio dati quadrati membro, & quidem in ſiniſteriore ejus membri nota: quippe terminatur in ſecunda a dextris nota, quæ in aſſumpto quadrato 5, 47, 56 eſt ſiniſterior nota tertii a ſiniſtris membri. Idem in alio quocunque quadrato numerico, cujus radix pluribus, quam duabus notis conſtet, æque animadvertere licet. Deinde quadratum termini ſecundi 4, quod quadratum eſt = 16, in ejusdem tertii membri nota dextima terminari clarum eſt.

95. Coroll. Quodſi ergo dati quadrati numerici radix pluribus, quam duabus, notis conſtet, & primæ duæ notæ pro primo ejusdem radicis termino ſumantur, tertia autem nota pro termino ſecundo; hæ præterea leges generatim ſtatui poſſunt. 1) Duplum termini

mini primi ductum in terminum ſecundum terminatur in tertio dati quadrati membro, & quidem in ſiniſteriore ejus membri nota. 2) Quadratum termini ſecundi in dextima ejusdem tertii membri nota terminatur.

Schol. Si aſſumeretur ejusmodi quadratum numericum, cujus radix quadrata ſit quatuor notarum, & ſi præterea tres priores radicis notæ pro primo ejusdem radicis termino aſſumerentur, dextima autem nota pro ſecundo; ea, quam hactenus ſecuti ſumus, ratiocinandi methodo facile pateret, duplum termini primi ductum in terminum ſecundum terminari in ſiniſtima nota membri quarti; quadratum vero termini ſecundi terminari in dextima ejusdem quarti membri nota: & ſic porro.

96. PROBLEMA XXIV. *E dato quadrato numerico utcunque magno radicem quadratam extrahere.*

Resolut. Datum quadratum includatur parentheſi; tum a dextris inchoando poſt binas quasque notas inſeratur virgula: radix tot erit notarum, quot fuerint hujusmodi membra virgulis diſtincta (91). e. g. Si ex 529 extrahenda ſit radix quadrata; id quadratum hoc modo ſcribatur: 5, 29.

2do. A ſiniſtris inchoando operationem, aſſumatur primum dati quadrati membrum. In membro hoc latet quadratum termini primi quæſitæ radicis (93): itaque in tabula (88) quæratur numerus quadratus, qui ſit æqualis, vel proxime minor primo illo dati quadrati membro; tum ejus numeri quadrati radix ſcribatur poſt datum quadratum parentheſi incluſum, pro prima radicis nota. Denique quadratum inventæ radicis, ſeu quadratus numerus in tabula inventus ſubtrahatur ab aſſumpto primo dati quadrati membro, & reſiduum, ſi quod manet, ducta linea transverſa ſubſcribatur.

3tio. Ejusmodi reſiduo, ſi quod manſit, adjungatur a dextris ſecundum dati quadrati membrum: ſi autem nullum manſit reſiduum, ſolum ſecundum dati quadrati membrum ſcribatur infra lineam transverſam. Porro dextima ſecundi hujus membri nota interjecto commate ſeparetur, & numeri, qui *comma* ſiniſtram verſus

præcedunt, dividantur per duplum primi termini jam inventi; tum quotus pro fecundo radicis termino fcribatur ad dextram prioris termini. Porro quotus ifte adjungatur divifori a dextris, totumque hoc multiplicetur per eundem quotum; dein vero factum ex hac multiplicatione enafcens fubtrahatur a numero infra transverfam lineam fcripto. En exemplum harum regularum.

Quadratum datum,		*Radix.*
	(5, 29)	23.
A	4	
B	1, 2, 9	
C	4 3	
D	1 2 9	

Nempe fub lit. A eft numerus quadratus in tabula (88) repertus, primo dati quadrati membro = 5 proxime minor; cujus radix = 2 (per reg. *2dam*) pro prima radicis nota fcribitur a dextris dati quadrati, parenthefi inclufi.

Sub lit. B prima nota 1 eft refiduum, quod manet 4 a 5 fubtrahendo; cui refiduo (per reg. *3tiam*) adjicitur a dextris fecundum dati quadrati membrum = 29, fed ita, ut hujus dextima nota 9 interjecto *commate* fecernatur.

Sub lit. C prima nota 4 eft duplum termini primi radicis, per quem dividitur numerus 12, fub lit. B a nota dextima *commate* feparatus, & quotus = 3 pro fecunda radicis nota fcribitur. Porro fub eadem lit. C divifori 4 adjicitur a dextris quotus nunc inventus 3, tum 43 per eundem quotum multiplicatur. Demum factum ex hac multiplicatione enafcens, fub litera D adnotatum, fubtrahitur a numero infra primam lineam transverfam fub litera B fcripto: qua fubtractione peracta nullum amplius manet refiduum, ac proinde peracta jam eft tota operatio, inventaque radix integra = 23.

4to. Si datum quadratum pluribus, quam duobus membris conftet; ejus radix pluribus, quam duabus notis

notis constabit (91). Itaque duæ radicis notæ per superiores regulas jam inventæ considerentur instar unius, habeanturque pro primo radicis quæsitæ termino, ea vero nota, quæ proxime sequitur, latetque adhuc, pro secundo: tum eadem methodo, quam regula 3*tia* præscribit, continuetur operatio. Scilicet ad residuum, quod post alteram subtractionem remansit, adjungatur a dextris tertium dati quadrati membrum, interjectoque *commate* resecetur dextima hujus membri nota; tum numeri, qui comma sinistram versus præcedunt, dividantur per duplum termini primi radicis, seu per duplum duarum radicis notarum jam inventarum, & quotus pro novo radicis termino scribatur &c. Recole, quæ in Reg. 3*tia* porro præcipiuntur. Si tribus radicis notis jam inventis adhuc quarta lateat; tres illæ notæ jam inventæ pro primo radicis termino habeantur, & ea, quæ adhuc latet, pro secundo: tum rursus ea methodo, quam regula 3*tia* continet, operatio continuetur; & sic porro.

EXEMPLUM *omnium præced. regularum.*

Datum quadratum (1, 74, 24) *Radix* 132.

A	1
B	— 7,4
C	23
D	69
E	— 52,4
F	262
G	524

Sub lit. A est quadratum in tabula (88) repertum primo dati quadrati membro æquale, cujus radix = 1 pro prima quæsitæ radicis nota scribitur. Idem quadratum si a primo illo dati quadrati membro subtrahatur, nullum manet residuum. Hinc per reg. 3*tiam* infra linem transversam nonnisi secundum dati quadrati membrum = 74 scribitur sub lit. B; ita tamen, ut ejus notam dextimam ab altera interjectum *comma* secernat.

Sub lit. C prima nota 2 eſt duplum termini primi radicis, per quod dividitur numerus 7, & quotus = 3 pro ſecunda radicis nota ſcribitur. Porro quotus iſte adjungitur eidem numero 2 a dextris ſub ead. lit. C, totumque iſtud, ſcilicet 23, per eundem quotum multiplicatur; tum factum enaſcens = 69, ſub lit. D ſcriptum, ſubtrahitur ab aſſumpto dati quadrati membro ſub lit B adnotato, & reſiduum = 5 infra novam transverſam lineam pro ulteriore operatione ſub lit. E adnotatur.

Tranſitur jam ad regulam 4*tam*; juxta quam reſiduo 5 adjungitur a dextris tertium dati quadrati membrum = 24 ſub ead. lit. E, ejusque dextima nota interjecto commate ſeparatur.

Sub lit. F ſcribitur duplum duarum primarum radicis notarum hactenus inventarum, quod duplum eſt = 26, & per illud numerus 52 ſub lit. E ſcriptus dividitur; tum quotus = 2 ſcribitur pro nova radicis nota. Porro idem quotus diviſori 26 adjungitur a dextris ſub lit. F, & totum hoc per eundem quotum multiplicatur. Denique factum enaſcens = 524 ſub lit. G ſcriptum ſubtrahitur a numero 524 ſub lit. E adnotato. Qua ſubtractione peracta cum nullum ſuperſit reſiduum, omniaque dati quadrati membra jam ſenſim depoſita ſint; abſoluta eſt operatio tota, acquiſitaque radix integra = 132.

5*to*. Si inter operandum eveniat, ut duplum termini primi majus ſit numero per ipſum dividendo; pro quoto, ſeu pro nova radicis nota ſcribatur zerus: tum eidem numero dividendo adjiciatur a dextris ſequens dati quadrati membrum. Porro dextima hujus membri nota interjecto commate ſecernatur, numerique comma præcedentes per duplum omnium radicis notarum hactenus inventarum, inſtar unius termini conſideratarum dividantur: denique quotus enaſcens ſcribatur pro nova radicis nota, & reliqua more conſueto fiant. e. g.

Da-

Datum quadrat. (4, 24, 36) *Radix* 206.

A 4
B — 2, 4
C 4
B′ 243, 6
C′ 40 6
D 2436

Sub lit. A eſt numerus quadratus in tabula (88) repertus. Sub litera B eſt ſecundum dati quadrati membrum. Sub lit. C eſt duplum termini primi radicis. Jam vero hoc duplum ne ſemel quidem continetur in numero 2 ſub lit. B poſito: itaque pro ſecunda radicis nota (per reg. 5*tam*) ſcribitur zerus, & ſub lit. B′ ſecundo dati quadrati membro adjicitur ejusdem membrum tertium.

Sub lit. C′ primæ duæ notæ 40 ſunt duplum duarum radicis notarum hactenus inventarum; per quod numerus 243, ſub lit. B′ poſitus dividitur, & quotus = 6 pro tertia radicis nota ſcribitur. Porro idem quotus diviſori 40 adjungitur a dextris ſub lit. C′, & totum hoc per eundem quotum multiplicatur. Denique factum enaſcens = 2436 ſub lit. D ſcriptum ſubtrahitur a numero 2436 ſub lit. B′ adnotato. Qua ſubtractione peracta nullum amplius manet reſiduum: hinc cum præterea neque ſuperſit amplius ullum dati quadrati membrum, peracta eſt tota operatio, acquiſitaque radix integra = 206.

6to. Si ex fractione radix quadrata extrahenda ſit; ea tam ex numeratore per regulas ſuperiores, quam etiam ex denominatore extrahatur. e. g. $\sqrt{\frac{144}{4}}$ eſt $= \frac{12}{2} = 6$; eſt enim $\sqrt{144} = 12$, & $\sqrt{4} = 2$.

Demonstratio *harum regularum*, 1) Quoniam in primo cujuslibet dati quadrati membro latet quadratum

tum termini primi radicis (93); per regulam *2dam* rite determinari primum radicis terminum in confeſſo eſt.

2) Ut regulæ *3tiæ* ratio pateat, ponamus ob oculos exemplum, quod eidem regulæ *3tiæ* ſubnexuimus. Sub lit. B continetur datum quadratum ſolo primi radicis ſuæ termini quadrato = 4 mulctatum: itaque ſub lit. B continetur duplum termini primi radicis ductum in ſecundum, in formula generali (83) per $2ab$ repræſentari ſolitum, & præterea quadratum ſecundi termini, ſeu b^2 (83). At duplum termini primi ductum in ſecundum terminatur ante *comma* in numero 2, ſcilicet in dati quadrati ſiniſteriore ſecundi membri nota (93). Hinc ſi numerus 12, *comma* præcedens dividatur per duplum termini primi radicis; pro quoto obvenire debet ſecundus radicis terminus (*Arith.* 55.). Hoc eſt, ſecundus radicis terminus per regulam tertiam rite determinatur.

Porro poſtquam duæ radicis notæ jam inventæ ſunt, earum quadratum a dato quadrato plene ſubtrahendum eſt, ut appareat, num præterea aliquid in dato quadrato lateat, an non: conſequenter adhuc duplum termini primi ductum in ſecundum, & quadratum ſecundi (nam quadratum termini primi jam per reg. *1mam* ſubtractum eſt) reſtat ſubtrahendum. Atque hujus ſubtractionis inſtituendæ methodum continent reliqua, quæ in regula *3tia* porro præſcribuntur. Dum enim in aſſumpto exemplo, duplo primi termini radicis, ſeu numero 4 ſub lit. C adjunctus erat a dextris ſecundus radicis terminus 3; reapſe duplum termini primi, & terminus ſecundus in unam ſummam collecta fuere: adeoque dum 43 per 3 multiplicatus fuit, re ipſa ſecundus radicis terminus 3 tam in duplum termini primi, quam etiam in ſe ipſum ductus erat. Hinc dum factum ex hac multiplicatione enaſcens = 129 ſubtractum fuit a numero 129 ſub lit. B poſito, totum jam radicis binomiæ quadratum a dato quadrato ſubtractum erat. Unde etiam, quoniam ſubtractis his nihil amplius remanſit e dato quadrato, palam eſt, integram dati quadrati radicem eſſe eam, quæ illic inventa eſt, ſcilicet = 23.

3) Ut ratio regulæ *4tæ* pateat, contemplemur tantiſper exemplum eidem regulæ *4tæ* ſubnexum. Hoc in

in exemplo prorſus eadem methodo extractæ ſunt duæ priores radicis notæ, totumque earum quadratum a dato quadrato ſubtractum. qua uſi ſumus in exemplo regulæ tertiæ ſubnexo; ita ut ſub lit. E jam ea duntaxat dati quadrati pars contineatur, quæ remanſit, poſtquam ex eo ſubtractum eſt quadratum duarum priorum radicis notarum. Itaque ſi duæ priores radicis notæ inſtar unius termini primi conſiderentur, ea vero nota, quæ adhuc latet, inſtar ſecundi; in numero 524 ſub lit. E adnotato latet adhuc duplum termini primi radicis ductum in ſecundum, & præterea quadratum termini ſecundi. Eo ipſo autem facile patet, eadem methodo, quam regula 3tia præſcribit, continuandam eſſe operationem.

4) Regula 5*ta* fere ejusmodi compendium continet, quo in *diviſione* uti ſolemus, dum eo caſu, quo *diviſor* in aſſumpta *dividendi* nota ne ſemel quidem continetur, pro quoto *zerum* ſcribimus, & novam *dividendi* notam priori adjungimus (*Arith.* 54. *reg.* 4*ta*). Denique ratio regulæ 6*tæ* eſt: nam ſi fractio ad quadratum elevanda ſit, ejus tam numerator, quam etiam denominator ad quadratum elevari debet (68): ergo etiam, ſi ex fractione radix quadrata extrahenda ſit, tam ex numeratore ejus, quam ex denominatore radix quadrata extrahatur, oportet (81).

EXEMPLA ALIA *Extr. Radic. quadrat.*

I. *Quadrat.*	(1, 44)	*Radix*	12
II. *Quadrat.*	(6, 25)	*Radix*	25
III. *Quadrat.*	(64, 00)	*Radix*	80
IV. *Quadrat.*	(6,40,09)	*Radix*	253
V. *Quadrat.*	(4,20,25)	*Radix*	205

Schol. Si in dato quopiam exemplo ex membro ultimo poſt peractam ſubtractionem quodpiam reſiduum maneat; id argumento erit, datum numerum non eſſe perfectum quadratum. Quo caſu extractio radicis per *approximationem* continuanda eſt, ſeu reſidua radicis pars in fractionibus quatenus fieri licet, eſt invenienda. Hoc autem modo inſtituatur operatio. Detur e. g. numeme-

merus 147, ex quo extrahenda sit radix quadrata. Fiat operatio per regulas superiores, dum e dato hoc numero nullum amplius supersit membrum. Invenietur in numeris integris radix = 12; at peracta ultima subtractione remanebit residuum = 3.

Residuo huic tanquam numero integro concipiatur pro denominatore subscripta unitas; tum numeratori adjiciantur duo zeri, ut sit 300, totidemque adjici concipiantur denominatori: hoc pacto residuum illud convertetur in fractionem, cujus denominator sit = 100, quin prior ejus residui valor immutetur (48). Jam taciti hujus denominatoris radix quadrata erit = 10, mente duntaxat retinenda: e numeratore autem extrahatur radix per regulas superiores, spectando zeros adjectos instar novi membri adjuncti. Scilicet is numerator hoc modo scribatur: 3 0, 0; tum 30 dividatur per duplum notarum hactenus inventarum, seu per 24, & quotus = 1 pro nova radicis nota scribatur, subscripta ipsi denominatoris radice = 10. Consequenter radix hactenus est = 12 + $\frac{1}{10}$: at peracta postremæ hujus operationis subtractione remanet residuum = 59; quare aliqua radicis pars adhuc latet, ac proinde approximatio, si lubet, continuari potest.

Scilicet residuum 59 ob duos illos zeros superius adjectos pro denominatore habet 100. Adjungantur denuo residuo illi numeratori duo zeri, totidemque adjungi concipiantur etiam denominatori. Denominator erit = 10000, cujus radix quadrata est = 100, mente duntaxat retinenda: e numeratore autem extrahatur radix ut ante, spectando zeros adjectos instar novi membri adjuncti. Nimirum residuus ille numerator duobus zeris auctus hoc modo scribatur: 590, 0, tum 590 dividatur per duplum notarum hactenus inventarum, seu per 242, & quotus = 2 pro nova radicis nota, cujus denominator erit = 100, scribatur. Quo pacto radix hactenus inventa, est = 12 + $\frac{1}{10}$ + $\frac{2}{100}$; at aliqua ejus pars adhuc remanet latens; immo semper remanebit aliqua, tametsi porro quoque continuetur operatio: semper tamen magis ac magis accedetur

ad veram radicem, quo sæpius ea, quam hactenus tenuimus, operandi ratio repetita fuerit.

97. PROBLEMA XXV. *E dato cubo numerico utcunque magno radicem cubicam extrahere.*

RESOLUT. 1*mo*. Datus cubus includatur parenthesi; tum a dextris inchoando post ternas quasque notas inferatur virgula: radix tot erit notarum, quot hujusmodi membra (quorum quidem finiſtimum etiam duabus, aut unica nota conſtare poteſt), virgulis distincta fuerint. Hinc si datus cubus ultra tres notas non aſſurgat; ejus radix nonnisi unica nota conſtabit, quæ proinde radix in tabula n. 88. quærenda erit.

2*do*. Ponatur ob oculos formula generalis $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, quæ partes cubi radicem binomiam habentis repræsentet (86): tum a finiſtris inchoando operationem, aſſumatur primum dati cubi numerici membrum. In hoc membro latet cubus notæ primæ radicis: itaque in tabella (88) quæratur cubus, qui sit æqualis, vel proxime minor aſſumpto illo membro primo, & ejus radix ſcribatur poſt datum cubum parentheſi inclusum pro prima radicis nota. Porro cubus inventæ radicis ſubtrahatur ab eodem membro primo; tum ducta transverſa linea reſiduum, ſi quod manſit, ſubſcribatur.

3*tio*. Ad reſiduum, ſi quod manſit, adjungatur a dextris ſecundum dati cubi membrum: ſi autem nullum manſit reſiduum; ſolum ſecundum dati cubi membrum ducta transverſa linea ſubſcribatur. In finiſtima hujus membri nota terminatur $3a^2 b$, ſeu triplum quadratum primi radicis termini jam inventi in ſecundum terminum, qui adhuc latet, ductum: in penultima ejusdem membri nota terminatur $3ab^2$, ſeu triplum termini primi ductum in ſecundi quadratum: denique in nota ultima terminatur b^3, ſeu cubus termini ſecundi. Hæc facile illuſtrari poſſent ejusmodi animadverſionibus, cujusmodi ſunt eæ, quas n. 90, & ſequ. pro extractione radicis quadratæ attulimus, niſi Tironibus noſtris ad res ſibi magis neceſſarias properandum eſſe cenſeremus. Itaque relictis, commateque interjecto ſeparatis dua-

duabus dextimis fecundi membri notis reliquum dividatur per triplum quadratum primi termini jam inventi, & quotus pro fecundo radicis termino fcribatur. Idem quotus ducatur in triplum quadratum termini primi jam inventi, feu in divifores, & factum ita fubfcribatur affumpto numero, qui ex refiduo prioris fubtractionis, & adjuncto fequente cubi membro conftat, ut dextima ejus facti nota finiftimæ fecundi illius membri notæ refpondeat: huic facto fubfcribatur factum alterum, fcilicet tripli quadrati termini fecundi in primum terminum ducti; fed ita, ut hujus facti nota dextima refpondeat penultimæ dicti fecundi membri notæ: demum fubfcribatur etiam cubus fecundi termini, ita tamen, ut ultima hujus nota ultimæ fecundi membri notæ refpondeat. Porro tria hæc facta in unam fummam collecta fubtrahantur ab affumpto numero, nimirum ab eo, qui complectitur refiduum fuperioris fubtractionis, & fecundum dati cubi membrum.

4to. Si datus cubus pluribus, quam duobus membris conftet; ejus radix pluribus, quam duabus notis conftabit. Itaque duæ radicis notæ per fuperiores regulas jam inventæ pro primo radicis quæfitæ termino habeantur, ea vero nota, quæ proxime fequitur, latetque adhuc, pro fecundo; hoc pofito, fi eadem operatio repetatur, reperietur tertia radicis nota. Hac inventa, fi poft fubtractionem adhuc aliquod maneat refiduum; huic refiduo adjungatur membrum fequens, ac tribus radicis notis jam inventis inftar unius confideratis eadem lege repetatur operatio. Quod fi inventis tribus radicis terminis, quartus adhuc lateat; tres inventi termini inftar unius primi habendi erunt, & fic porro.

5to. Si inter operandum eveniat, ut triplum quadrati termini primi majus fit numero per ipfum dividendo: pro quoto, feu pro nova radicis nota fcribatur zerus: tum eidem numero dividendo adjiciatur a dextris fequens dati cubi membrum. Porro duæ dextimæ hujus membri notæ interjecto commate fecernantur, numerique *comma* præcedentes per triplum quadratum omnium radicis notarum hactenus inventarum inftar unius termini confideratarum dividantur: denique quotus

tus enascens scribatur pro nova radicis nota, operatioque more consueto continuetur.

EXEMPLUM *Extrac. Radic. Cubic.*

Datus Cubus (12, 167) *Radix* 23.

A	8
B - -	41,67
C - -	12
D - -	36
E - - -	54
F - - - -	27
G - -	4167

Sub lit. A est cubus in tabula (88) repertus, primo dati cubi membro proxime minor, cujus radix = 2 pro prima radicis quæsitæ nota scribitur. Sub lit. B prima nota 4 est residuum, quod mansit subtrahendo cubum in tabula repertum a primo membro, seu 8 a 12; reliquæ autem notæ a dextris adjunctæ, sunt secundum dati cubi membrum: quarum duæ postremæ notæ per Reg. 3tiam commate interjecto secernuntur.

Sub lit. C est triplum quadratum primæ notæ radicis, seu numeri 2, per quod numerus 41 (per reg. 3tiam) dividitur, & quotus = 3 pro secunda radicis nota scribitur. Sub lit. D est triplum quadratum termini primi radicis in terminum secundum ductum, quod in formula generali per $3a^2b$ repræsentatur. Sub lit. E est triplum quadratum termini secundi ductum in terminum primum, per $3ab^2$ repræsentari solitum. Sub lit. F est cubus termini secundi, seu numeri 3. Denique sub lit. G est summa trium particularium factorum, sub literis D, E, F contentorum: quæ summa si a numero 4167 sub lit. B posito subtrahatur, nullum remanet residuum; ac proinde operatio tota peracta jam est, acquisitaque integra radix cubica = 23.

Schol. Si in dato quopiam exemplo ex ultimo membro post peractam subtractionem quodpiam residuum maneat; id argumento erit, datum numerum non esse per-

perfectum cubum. Quo casu extractio radicis per *approximationem* continuanda est; uti de quadrato imperfecto num 96 Schol. locuti sumus: hoc discrimine, quod hic non duo, sed tres zeri sint adjiciendi tam numeratori, quam etiam denominatori residui, extractioque radicis juxta leges hoc numero allatas instituenda.

CAPUT QUARTUM.

De Calculo quantitatum Radicalium.

98. Quantitates *radicales* eæ dicuntur, quibus signum radicale (70) præfigitur. e. g. $\sqrt{8}$. Hujusmodi quantitates, tametsi plerumque *irrationales*, seu *surdæ* (71) sint, capaces tamen sunt variarum transformationum, additionis, subtractionis &c. Quapropter aliqua de quantitatibus radicalibus problemata resoluturi sumus: monentes interim, ea a Tironibus nostris sine dispendio doctrinæ sibi necessariæ prætermitti posse.

99. Quantitates radicales inter se comparatæ dicuntur esse *ejusdem denominationis*, si una eundem habeat exponentem signi sui radicalis, quem habet altera. e. g. $\sqrt{a}$ & $\sqrt{b}$ sunt *ejusdem denominationis*, quia exponens signi radicalis utrobique est idem, scilicet 2, qui plerumque non ponitur expresse, sed subintelligitur (70). Pariter ejusdem sunt denominationis $\sqrt[3]{3}$ & $\sqrt[3]{5}$. *Diversæ denominationis* autem eæ vocantur, quæ diversos habent signi radicalis exponentes: e. g. $\sqrt{a}$ & $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{5}$ & $\sqrt[4]{5}$.

100. PROBLEMA XXVI. *Quantitates radicales diversæ denominationis ad eandem denominationem reducere.*

Resolut. Sint reducendæ $\sqrt[n]{a^m}$ & $\sqrt[s]{b^r}$. Est $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ & $\sqrt[s]{b^r} = b^{\frac{r}{s}}$ (77). Cum ergo novi hi ex-

exponentes ſint fractiones heterogeneæ; reducantur ad eundem denominatorem methodo conſueta (43), ac proinde convertantur in has: $a^{\frac{ms}{ns}}$ & $b^{\frac{nr}{ns}}$. Denique ſi his fractionibus reſtituantur ſigna radicalia, abeunt demum in has *ejusdem denominationis* radicales: $\sqrt[ns]{a^{ms}}$ & $\sqrt[ns]{b^{nr}}$, quin prior earundem valor immutetur (77). Eodem modo ſi reducendæ ſint $\sqrt{5}$ & $\sqrt[3]{5}$; eæ convertantur primum in has: $5^{\frac{1}{2}}$ & $5^{\frac{1}{3}}$ (77): hæ in iſtas: $5^{\frac{3}{6}}$ & $5^{\frac{2}{6}}$, ſcilicet fractiones ad communem denominatorem reducendo: iſtæ denique quantitates commutentur demum in has *eadem denominatione* gaudentes: $\sqrt[6]{5^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$.

101. AXIOMA I. *Quæ ſunt æqualia uni tertio, aut duobus æqualibus, ſunt æqualia inter ſe.* e. g. 1) Si ſit $a = b$, & $c = b$; erit etiam $a = c$. 2) Ponamus $a = b$ $c = d$: ſi fuerit $b = d$, erit etiam $a = c$.

102. PROBLEMA XXVII. *Quantitates radicales reducere ad minores terminos, ſeu ad ſimpliciorem expreſſionem.*

Resolut. Quantitas poſt ſignum radicale poſita reſolvatur in ſuos factores. Quodſi unus ex iis factoribus fuerit potentia ejusdem gradus, quem ſigni radicalis exponens indicat; extrahatur ex eo radix, & ponatur ante ſignum pro coefficiente, ceteris factoribus poſt ſignum radicale relictis. e. g. Quantitas radicalis $\sqrt[n]{ambn}$ habet poſt ſignum radicale factores am & bn; quorum alter nempe bn cum ſit potentia ejusdem gradus, quem ſigni radicalis exponens n indicat, ejus radix b ponatur ante ſignum, altero factore poſt ſignum relicto: hoc pacto quantitas illa radicalis abibit in hanc jam ſimpliciorem: $b\sqrt[n]{am}$. Porro non mutari priorem ejus valorem, ſeu eſſe $\sqrt[n]{ambn} = b\sqrt[n]{am}$,

 faci-

facile patet. Nam eſt $\sqrt[n]{a^m b^n} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{n}{n}}$, & $b\sqrt[n]{a^m} = b a^{\frac{m}{n}}$ (77); atqui eſt $a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{n}{n}} = b a^{\frac{m}{n}}$; eſt ergo etiam $\sqrt[n]{a^m b^n} = b\sqrt[n]{a^m}$ (101).

103. Coroll. Detur radicalis numerica $\sqrt[3]{24}$; hæc in ſuos factores reſoluta abit in hanc: $\sqrt[3]{8.3}$. Ex factore 8 extrahatur radix cubica 2, & ante ſignum radicale ponatur: erit eadem radicalis quantitas ad ſimplic. expreſſ. reducta $= 2\sqrt[3]{3}$. Et viciſſim coefficiens ante ſignum radicale poſitus transferri poteſt poſt idem radicale ſignum, quin prior quantitatis radicalis valor immutetur, modo coefficiens ille elevetur ad eam potentiam, quam indicat exponens ſigni radicalis. e. g. In quantitate radicali $2\sqrt[3]{3}$, coefficiens 2 elevetur ad cubum, isque cubus ponatur poſt ſignum radicale: nova quantitas radicalis $\sqrt[3]{3.8}$, ſeu $\sqrt[3]{24}$ erit æqualis priori $2\sqrt[3]{3}$.

Schol. Quantitas radicalis, quæ aut non poteſt in factores reſolvi, aut non habet factorem, qui ſit potentia exponentis datæ radicis, eſt *irreducibilis*. e. g. $\sqrt{7}$.

104. Si duæ, vel plures quantitates, ad ſimpliciſſimam expreſſionem reductæ, fuerint imprimis *ejusdem denominationis*, deinde habuerint eandem quantitatem poſt radicale ſignum poſitam; id genus quantitates dicuntur *communicantes*. e. g. $3\sqrt{2}$ & $5\sqrt{2}$, item $a\sqrt{b}$ & $c\sqrt{b}$. Eæ vero quantitates radicales, in quibus alterutra harum conditionum, aut utraque deeſt, *incommenſurabiles* vocantur: e. g. $3\sqrt{2}$ & $5\sqrt{3}$.

105. PROBLEMA XXVIII. *Addere, vel ſubtrahere quantitates radicales.*

Re-

Resolut. Reducantur datæ quantitates ad expreſſionem ſimpliciſſimam (102); tum, ſi deprehendantur eſſe *communicantes*, addantur, vel ſubtrahantur earum coefficientes ante ſignum radicale poſiti, & ſumma, vel differentia communi quantitati radicali præfigatur. e. g. Dentur quantitates radicales $\sqrt{27}$ & $\sqrt{12}$, ut in unam ſummam addantur, vel vero ut poſterior a priore ſubtrahatur. Reductione ad ſimpliciſſimam expreſſionem abeunt in has: $3\sqrt{3}$ & $2\sqrt{3}$ (102). Earum ergo ſumma eſt $= 5\sqrt{3}$; differentia autem $= \sqrt{3}$. Ratio eſt; ſi enim $\sqrt{3}$ ponatur eſſe $= a$; quantitates illæ radicales æquivalent his: $3a$ & $2a$; harum autem ſumma eſt utique $= 5a$, & differentia $= a$.

Schol. Si quantitates irrationales ad expreſſionem ſimpliciſſimam reductæ deprehendantur non eſſe *communicantes;* tractentur ut heterogeneæ (17. *reg.* 5).

106. PROBLEMA XXIX. *Quantitates radicales inter ſe multiplicare.*

Resolut. Si quantitates radicales non fuerint ejusdem denominationis, ante omnia reducantur ad eandem denominationem (100); tum coefficientes multiplicentur inter ſe, & quantitates poſt radicale ſignum poſitæ itidem multiplicentur inter ſe, communi ſigno radicali retento. e. g. Si $\sqrt[n]{am}$ multiplicari debeat per $\sqrt[s]{br}$; reductæ ad eandem denominationem abeunt in has: $\sqrt[ns]{ams}$ & $\sqrt[ns]{bnr}$ (100). Itaque *factum* erit $= \sqrt[ns]{amsbnr}$. Ratio eſt; nam aſſumptæ radicales his æquivalent: $a^{\frac{m}{n}}$ & $b^{\frac{r}{s}}$ (77); quæ inter ſe multiplicatæ dant factum $= a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} b^{\frac{nr}{ns}}$ (43) $= \sqrt[ns]{ams\, bnr}$ (77).

Schol. Quod ſi quantitates pluribus ſignis radicalibus afficiantur; eæ radicales debent in ſe ipſas duci, quæ totidem radicalia ſigna ante ſe habent. e. g. Sit $\sqrt{(3 + \sqrt{2})}$ multiplicanda per $\sqrt{(5\sqrt{4})}$; ſeu quod

idem eſt, ſit $\sqrt{3} + \sqrt{\sqrt{2}}$ multiplicanda per $\sqrt{5} \times \sqrt{\sqrt{4}}$. Quantitas radicalis 3 per 5, & 2 per 4 multiplicari debebit, eritque *factum* totale $= \sqrt{15} \times \sqrt{\sqrt{4}} + \sqrt{5} \times \sqrt{\sqrt{8}}$. Sit enim $\sqrt{2} = a$, $\sqrt{3} = b$, $\sqrt{4} = c$, $\sqrt{5} = d$. Reapſe datur $b + \sqrt{a}$ multiplicanda per $d\sqrt{c}$. Jam vero, uti ex *Reſolut. problem.* patet, *factum* ex hac multiplicatione enaſcens eſt $= bd\sqrt{c} + d\sqrt{ac}$: quod factum (ſi literis valores numerici reſtituantur) eſt $= \sqrt{15} \times \sqrt{\sqrt{4}} + \sqrt{5} \times \sqrt{\sqrt{8}}$.

107. PROBLEMA XXX. *Datam quantitatem radicalem per aliam radicalem dividere.*

Resolut. Si quantitates radicales non fuerint ejusdem denominationis, ante omnia reducantur ad eandem denominationem; tum coefficiens dividendi dividatur per coefficientem diviſoris, & quantitas, quæ in dividendo poſt ſignum radicale poſita eſt, dividatur per quantitatem in diviſore poſt ſignum radicale poſitam. e. g. Sit *dividendus* $6\sqrt{ab}$, *diviſor* $3\sqrt{b}$; erit quotus $2\sqrt{a}$. Nempe diviſio prorſus contraria eſt multiplicationi, ita ut id totum diffuat diviſio, quod multiplicatio componit: quemadmodum ergo in multiplicatione coefficientes multiplicari debent inter ſe, & quantitates poſt ſignum radicale poſitæ itidem inter ſe (106), ita ex adverſo in diviſione coefficiens dividendi per coefficientem diviſoris, & quantitas in *dividendo* poſt ſignum radicale poſita per quantitatem in *diviſore* poſt ſignum radicale poſitam dividatur, oportet.

Schol. Si quantitates pluribus afficiantur ſignis radicalibus, illæ debent per ſe ſe dividi, quæ poſt totidem ſigna radicalia poſitæ ſunt.

SECTIO

SECTIO TERTIA.
DE PROBLEMATUM RESOLUTIONE, SEU ANALYSI.

CAPUT PRIMUM.
De Præcipuis Analyseos Operationibus.

108. *Problematis* nomine hoc loco venit ejusmodi propositio, qua petitur, ut e datis quibusdam quantitatibus alia incognita quantitas, una vel plures detegantur. e. g. Si quæratur, quisnam sit ille numerus, qui tribus septimis sui partibus additus efficiat summam = 60; *problema solvendum* proponi dicitur. Methodus hujusmodi problemata ope calculi algebraici resolvendi vocatur *Analysis*.

Porro manifestum est, non posse e datis quantitatibus erui quantitatem incognitam, nisi inter hanc, & illas nexus quidam, & relationes intercedant. Ejusmodi nexus, & relationes nuncupantur *conditiones problematis*. e. g. In exemplo nunc allato hæc adnectitur conditio, ut numerus inveniendus, si tribus septimis sui partibus addatur, accurate efficiat summam = 60. Quodsi inveniatur quantitas, quæ id genus datis conditionibus satisfaciat; problema *solutum esse* dicitur.

109. In quavis data problematis conditione involvitur quædam æqualitas quarundam duarum quantitatum, quæ *æquatio* appellatur. Unde consequens est, problema in tot æquationes resolvi posse, quot adjectas habuerit conditiones: scilicet quævis conditio æquatione sua exprimi potest. e. g. Si proponatur problema de inveniendis duobus numeris, quorum summa sit = 10, differentia = 2; duæ aderunt conditiones, totidemque æquationes. Sed hæc ex sequentibus clariora fient.

Schol. Universam hanc problemata resolvendi artem in quatuor præcipuas operationes generatim distribue-

buere lubet: in quibus si Tiro probe exercitatus fuerit, etiam in difficilioribus problematis solvendis cum successu versabitur.

PRIMA ANALYSEOS OPERATIO.

110. Prima analyseos operatio consistit in *accurata omnium conditionum problemati adnexarum discussione, & apta quantitatum tam cognitarum, quam incognitarum denominatione.* Scilicet Analysta problema quodpiam resoluturus rite consideret imprimis, quisnam sit status quæstionis, & quæ conditiones problemati adjectæ. His probe cognitis dispiciat deinde, quænam sint quantitates cognitæ, quæ incognitæ; tum cognitas quidem quantitates primis alphabeti literis a, b, c &c. denominet, incognitas vero ultimis x, y, z. e. g. Si proponatur problema de inveniendis duobus numeris, quorum summa sit $= 15$, factum autem $= 56$; ponat $15 = a$, $56 = b$, unum numerum inveniendum $= x$, alterum $= y$: scilicet in calculo deinde loco earum quantitatum his literis usurus. Porro denominationes hæ ad latus quodpiam folii adnotandæ erunt; ne excidat e memoria, quænam litera hujus quantitatis loco usurpetur in calculo.

111. Sæpius ex ipsis problematis conditionibus diligenter expensis patet, pro statuendis denominationibus non debere totidem diversas alphabeti literas assumi, quot diversas quantitates problema continet, sed plures quantitates (seu eæ cognitæ sint, seu incognitæ) paucioribus literis exprimi posse. Quo casu ejusmodi compendio in statuendis denominationibus utendum omnino est: sic enim facilior evadet problematis solutio, uti deinceps apparebit. Quam in rem tres sequentes regulas notasse juvabit. *1mo.* Si in dato problemate duæ sint incognitæ quantitates, clarum autem sit, unam earum esse duplam alterius; prima denominetur x: at altera non denominetur y, sed $2x$. Si autem altera quantitas esset dimidia prioris, & ista prior denominaretur x; altera illa deberet poni $= \frac{x}{2}$. Et sic porro in aliis quoque similibus casibus sive incognitarum quantitatum, sive etiam cognitarum.

2do.

2do. Sint duæ quæcunque incognitæ quantitates in dato problemate, quarum differentia d nota ſit. Si major quantitas ponatur $= x$; minor ponenda erit $= x - d$: ſi autem minor ponatur $= x$; ma[illegible] [illegible]nda erit $= x + d$. Clarum enim eſt, ex duab[illegible]s quibuscunque inæqualibus quantitatibus minorem ſemper eſſe æqualem maj[illegible]ri, dempta differentia; majorem vero æqualem eſſe minori, addita differentia. Sic ſi aſſumamus numeros 6 & 4, quorum differentia eſt $= 2$; eſt utique $4 = 6 - 2$, & $6 = 4 + 2$.

3tio. Sint quæcunque duæ quantitates inæquales, quarum ſumma vocetur s, differentia d; demonſtrabimus ſequ. Cap. quantitatem majorem eſſe $= \frac{s + d}{2}$ minorem autem $= \frac{s - d}{2.}$ Hoc eſt, majorem quantitatem ſemper eſſe æqualem ſemiſummæ addita ſemidifferentia; minorem autem ſemiſummæ dempta ſemidifferentia. Unde hoc corollarium eruitur: ſi duæ id genus quantitates occurrant in problemate, quarum ſumma s nota ſit, non item differentia; non eſt neceſſe duas illas quantitates duabus diverſis literis x & y denominare, ſed ſatis eſt earundem ſemidifferentiam ponere $= x$. Hoc enim poſito major quantitas erit $= \frac{s}{2} + x$, minor autem $= \frac{s}{2} - x$.

EXEMPLA *Primæ operationis Analyſ.*

I. Detur ſequens problema. *Quidam parens tribus filiis ſuis reliquit hæreditatem* 800 *florenorum hac lege, ut ſecundus filius* 100 *florenis plus acquirat ex ea hæreditate, quam primus: tertius autem tantundem accipiat, quantum primus, & ſecundus ſimul. Quæritur, quantum unicuique ex ea hæreditate obtigerit?* Quantitates, quæ hoc in problemate denominari debent, ſunt duæ cognitæ, ſcilicet numerus 800, & 100; deinde tres incognitæ, nempe ſingulorum filiorum hæreditates. Itaque ponatur imprimis $800 = a$, $100 = b$. Deinde hæreditas primi filii ponatur $= x$: quo poſito hæreditas

secundi erit $= x + b$; tertii autem $= x + x + b$, seu $= 2x + b$.

II. Proponatur istud problema. *Quidam parens 30 annis senior est filio suo. Quodsi ætati Parentis addas ejusdem ætatis dimidium, & præterea $\frac{1}{4}$ partem ætatis filii; pro summa totali obvenient 80 anni. Quæritur, quot annorum sit parens, quot annorum filius.* Quantitates, quæ hoc in problemate denominandæ occurrunt, sunt: 30, 80, ætas parentis, ætas filii. dimidia pars de ætate parentis, & $\frac{1}{4}$ pars de ætate filii. Anni 30, quoniam sunt *differentia* ætatum, ponantur esse $= d$; $80 = a$. Ætas parentis sit $= x$: quo posito ætas filii erit $= x - d$, scilicet per illud compendii genus, quod superius in reg. 2da descripsimus. Hinc dimidia parentis ætas erit $= \frac{x}{2}$, & $\frac{1}{4}$ pars ætatis filii erit $= \frac{x-d}{4}$.

III. Detur problema sequens. *Quidam interrogatus, quotnam oviculas haberet, hoc modo respondit: si adhuc totidem haberem, quot habeo, & præterea $\frac{1}{2}$ partem earum, item $\frac{1}{4}$ partem, & adhuc unam; tunc essent* 100. *Quæritur, quotnam oviculas habuerit.* Sit $100 = a$; quæsitus ovicularum numerus $= x$. Hujus numeri $\frac{1}{2}$ pars erit $= \frac{x}{2}$, & $\frac{1}{4}$ pars $= \frac{x}{4}$.

Schol. Tria hæc problemata probe imprimantur memoriæ: ea enim in singulis sequentibus operationibus resumentur.

ALTERA ANALYSEOS OPERATIO.

112. Altera analyseos operatio est *dati problematis ad suas æquationes reductio.* Scilicet post probe cognitum quæstionis statum, institutasque singularum quantitatum ad problema pertinentium denominationes, accurate videat Analysta, quamnam æquationem in se contineat quævis conditio problematis; tum quamlibet conditionem propria æquatione exprimat, inter quanti-

titates, quæ per conditionem problematis æquales ſunt, ſignum = interponendo. Hoc eſt, propoſitum problema ſignis algebraicis per unam, vel plures æquationes adæquare exprimat. Quodſi aliqua problematis conditio (quod aliquando evenit) non æquationem, ſed aliquam proportionem in ſe contineat; ejusmodi proportio methodo ſuo loco tradenda in æquationem transformetur.

Schol. 1. Altera hæc analyſeos operatio, ſeu æquationum inventio maximi laboris eſt, & quaſi lapis lydius, in quo egregium ingenii ſui ſpecimen Analyſta dare poſſit. Immo præter acre ingenium longiori etiam exercitio opus eſt, ut facilitas æquationes in cuibusvis problematis inveniendi acquiratur. Quare Tirones, cumprimis initio, in ſtatuendis problematum ipſis propoſitorum æquationibus juvandi erunt. Lubeat reſumere tria illa problemata, quæ num. 111. propoſita ſunt, & pro iis æquationes determinare.

In Probl. I. (111) Filii primi hæreditas eſt $= x$, ſecundi $= x + b$, tertii $= 2x + b$, uti eo loco dictum eſt. Porro ex problematis conditione patet, omnium trium filiorum hæreditates ſimul ſumptas eſſe 800 florenos, ſeu eſſe $= a$: itaque in hoc problemate eſt $x + x + b + 2x + b = a$, ſeu eſt $4x + 2b = a$.

In Probl. II. (111) Ætas parentis eſt $= x$, hujus dimidium $= \frac{x}{2}$; ætas filii $= x - d$, hujus $\frac{1}{4}$ pars $= \frac{x-d}{4}$. Cum ergo per conditionem problematis ætas parentis cum ſuo dimidio, & ſimul cum $\frac{1}{4}$ parte ætatis filii debeat efficere 80 annos, ſeu eſſe $= a$; erit in hoc problemate $x + \frac{x}{2} + \frac{x-d}{4} = a$.

In Probl. III. (cit.) Ex data conditione facile patet, quæſitum ovicularum numerum x bis ſumptum, addita $\frac{1}{2}$ ſui parte, & $\frac{1}{4}$ parte, ac præterea unitate eſſe $= a$; id eſt, eſſe $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = a$

Schol.

Schol. 2. Patebit ex ſequentibus, non eſſe plures æquationes ad ſolvendum problema neceſſarias, quam ſint in eo problemate incognitæ quantitates diverſis literis expreſſæ: cum ergo in quolibet allatorum trium problematum nonniſi unica litera x deſignet quantitatem incognitam; pro ſingulis eorum unicam æquationem inveniſſe ſatis eſt.

Schol. 3. Tertiæ analyſeos operationi præmittenda ſunt quæpiam axiomata, & theoremata.

113. AXIOMA II. *Si æqualibus quantitatibus eadem quantitas, vel æquales quantitates addantur; ſummæ erunt æquales.* e. g. Si ſit $a + b = c - d$; erit etiam (utrique idem e addendo) $a + b + e = c - d + e$.

114. AXIOMA III. *Si ab æqualibus quantitatibus eadem quantitas, aut æquales quantitates ſubtrahantur; reſiduæ quantitates erunt æquales.* e. g. Si ſit $a + b = c - d$; erit (ab utroque idem e ſubtrahendo) $a + b - e = c - d - e$.

115. THEOREMA X. *Quivis æquationis terminus ex uno membro in alterum transponi poteſt cum ſigno contrario, retenta membrorum æqualitate.* e. g. Si ſit $a + b = c - d$; poteſt e. g. quantitas d transponi in alterum æquationis membrum, dummodo ejus ſignum $-$ in contrarium $+$ transmutetur, eritque $a + b + d = c$. Pariter poteſt e. g. b transponi in membrum alterum mutato in contrarium ſigno ipſius, eritque $a + d = c - b$. Et ſic porro.

Demontr. Terminus, quem ex uno æquationis membro in alterum transferre cupis, vel eſt poſitivus, vel negativus. Si eſt poſitivus; eum ex uno æquationis membro in alterum ſigno mutato transferre tantundem eſt, ac poſitivum illum terminum tam ab uno, quam ab altero æquationis membro ſubtrahere. Sit enim $a + b = c$: ſi b mutato ſigno transferas, illud primo membro, ex quo auffers, utique ſubtrahis: at idem b ſubtrahis etiam ex membro altero, in quod mutato ſigno illud transfers: addere enim alicui quantitati quantitatem $- b$ tantundem utique eſt, ac ab eadem ſubtrahere $+ b$. Atqui æquatio non turbatur, ſi ex utro-

utroque ejus membro idem ſubtrahatur (114): ergo terminus quivis poſitivus ex uno æquationis membro in alterum transferri poteſt mutato ſigno, quin *æquatio*, ſeu mutua membrorum æqualitas turbetur. e. g. Cum ſit $6 + 4 = 10$, eſt etiam $6 = 10 - 4$. Quodſi autem terminus ex uno æquationis membro in alterum transferendus, negativus fuerit; eum mutato ſigno transferre tantundem eſt, ac unam eandemque poſitivam quantitatem addere tam uni quam alteri æquationis membro. e. g. Si ſit $a = c - b$; quum ex membro dextimo transfers $-b$, utique eidem membro addis $+b$, tollere enim quantitatem negativam eſt æqualem poſitivam addere: at etiam membro ſiniſtimo addis ea translatione quantitatem $+b$, ut clarum eſt. Cum ergo non turbetur æquatio, quum idem utrique membro additur (113); etiam quantitas negativa ex uno æquationis membro in alterum transferri poteſt, quin turbetur æquatio. e. g. Cum ſit $6 = 10 - 4$; eſt etiam $6 + 4 = 10$. Totius ergo theorematis veritas manifeſta eſt.

116. Coroll. I. Poteſt ergo quæcunque æquatio reddi æqualis nihilo; ſi nempe omnes unius membri termini mutatis ſignis in alterum transferantur. e. g. Si eſt $a + b = c - d$; eſt $a + b - c + d = 0$. Item cum ſit $10 - 3 = 5 + 2$, eſt $10 - 3 - 5 - 2 = 0$.

117. Coroll. II. Si in æquatione quapiam omnium utriusque membri terminorum ſigna mutentur in contraria, quin ullus terminus transferatur ex uno membro in aliud; mutua membrorum æqualitas non turbatur, dummodo ſingulorum omnino terminorum nullo neglecto ſigna mutentur in contraria. e. g. Cum ſit $6 + 4 = 12 - 2$; eſt quoque $-6 - 4 = -12 + 2$. Periclitanti enim patebit, hoc compendio idem præſtari, ac ſi omnes omnino utriusque membri termini ex una æquationis parte in alteram mutato ſigno ſucceſſive transferrentur: quæ ſucceſſiva translatio æqualitatem membrorum utique non turbat (115). At ſi vel in uno termino negligatur ſigni immutatio; jam prior membrorum æqualitas in aſſumpta hypotheſi terminorum loca ſua retinentium ſuffertur. Sic ſi eſt $a - b = c - d$; non poteſt eſſe $a + b = -c + d$: priorem enim

enim æquationem successiva terminorum ex uno membro in alterum translatione nunquam commutabis in hanc posteriorem, uti periclitanti patebit.

118. Coroll. III. Quivis terminus, qui in utroque æquationis membro, eodem signo affectus reperitur, retenta membrorum æqualitate utrinque deleri potest. e. g. Cum sit $6 + 2 + 4 = 10 + 2$; utrinque delendo $+ 2$ est $6 + 4 = 10$. Nam delere utrinque eandem quantitatem positivam tantundem est, ac utrinque eandem quantitatem subtrahere: delere autem utrinque eandem quantitatem negativam, idem est, ac utrinque addere æqualem quantitatem positivam.

119. AXIOMA IV. *Si æqualia per idem, aut per æqualia multiplicentur, vel dividantur; etiam* facta, *vel* quoti *inter se æquari debent.* e. g. Si sit $a = b$; erit etiam $2a = 2b$, item $\frac{a}{2} = \frac{b}{2}$.

120. THEOREMA XL. *Si unus, aut plures termini sive in uno duntaxat, sive in utroque æquationis membro per eandem aliquam quantitatem divisi sint; is divisor in eo, vel iis terminis deleri potest, dummodo reliqui omnes utriusque membri termini per eundem divisorem multiplicentur.* e. g. Si sit $a + \frac{b}{2} = c$; erit $2a + b = 2c$. Si fuerit $\frac{a}{c} + b = d - \frac{m}{c}$; erit $a + bc = cd - m$.

Demonstr. Delere alicujus fractionis divisorem tantundem est, ac fractionem illam per suum divisorem multiplicare: si enim e. g. fractio $\frac{a}{2}$ debeat per 2 multiplicari, *factum* est $= \frac{2a}{2} = a$ (45) Quodsi ergo alii quoque omnes utriusque membri termini in quibus ea deletio non usurpatur, per eundem divisorem multiplicentur; reapse utrumque æquationis membrum per idem multiplicatur: æqualitas ergo membrorum prorsus non turbatur (119).

121.

121. Coroll. Si ergo omnes utriusque membri termini per eandem quantitatem divisi sint, sufficit communem illum divisorem ubique delere. e. g. Si sit $\frac{a-b}{2} = \frac{a+d}{2}$; est $a - b = c + d$.

122. THEOREMA XII. *Si unus, aut plures termini in aliqua æquatione multiplicati sint per eandem quantitatem; hæc quantitas, seu coefficiens in eo, vel iis terminis deleri potest, modo reliqui omnes termini in utroque æquationis membro per eundem coefficientem dividantur.* e. g. Si sit $2a + 4 = 10$; erit $a + 2 = 5$.

Demonstr. Delere alicujus termini coefficientem tantundem est, ac eum terminum dividere per eundem coefficientem: si enim e. g. $2a$ dividi debeat per 2, quotus est $= \frac{2a}{2} = a$. Quodsi ergo alii quoque omnes utriusque membri termini, in quibus ea deletio non usurpatur, per eundem coefficientem dividantur; reapse utrumque æquationis membrum per idem dividitur: æqualitas ergo membrorum prorsus non turbatur (119).

123. Coroll. Itaque si omnes utriusque membri termini eundem habeant coefficientem; eo coefficiente deleto æqualitas membrorum non turbatur, modo is ubique deleatur. e. g. Si sit $2a + 2b = 2c - 2d$; est $a + b = c - d$.

124. THEOREMA XIII. *Potest utrumque æquationis membrum retenta æqualitate mutua ad eandem potentiam elevari; vel ex utroque membro eadem radix extrahi.* e. g. Si sit $a = b$; est imprimis $a^m = b^m$, est deinde $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$.

Demonstr. 1mæ partis. Assumamus quascunque duas radices a & b, inter se æquales. Has ad eandem potentiam quamcunque elevare, reapse non aliud est, quam easdem per æqualia semel, aut sæpius multiplicare. Sic si radices illæ eleventur ad cubum; a per a, b per b bis multiplicatur (66); est autem ex hypoth. $a = b$. Jam vero si æqualia multiplicentur, facta quoque inter se æquari debent (119): ergo potest utrumque

que æquationis membrum retenta æqualitate mutua ad eandem potentiam elevari.

Demonstr. *2dæ partis*. Fieri nequit, ut duæ inæquales quantitates eandem habeant potentiam secundam, tertiam &c. Secus enim quantitas minor e. g. bis in se ipsam ducta prorsus idem factum daret, quod daret quantitas major itidem bis in se ipsam ducta; quod absurdum est. Itaque si duæ ejusdem exponentis potentiæ fuerint æquales; etiam radices ipsarum eodem exponente gaudentes æquales sint, est necesse. Hoc est, altera quoque Theorematis pars manifesta est.

TERTIA ANALYSEOS OPERATIO.

125. Tertia Analyseos operatio est *æquationis ad unum terminum incognitum, & solitarium reductio*. Nimirum inventa per 2dam analyseos operationem æquatione, in id incumbere debet Analysta, ut retenta semper membrorum æqualitate ita pedetentim transformet æquationem, ut unum æquationis membrum sola quantitas incognita constituat, in altero autem membro meræ quantitates notæ nullis incognitis permixtæ habeantur. e. g. Si per 2dam operationem (112) hæc obtenta est æquatio: $x + b = c$; ea per regulas sequentes transformanda est in hanc: $x = c - b$, ut unum æquationis membrum sola incognita quantitas x constituat, in altero autem membro sint meræ cognitæ quantitates c & b. Hoc enim pacto jam innotescit valor incognitæ illius quantitatis, ac proinde problema propositum solvitur. Sic si in assumpta æquatione sit $c = 8$, $b = 3$; est $x = 8 - 3 = 5$.

126. Tertia hæc analyseos operatio sequentibus legibus est peragenda. 1*mo*. Si in aliquo, vel utroque æquationis membro occurrant fractiones; eæ ante omnia tollantur, ita tamen, ut membrorum æqualitas non turbetur: & quidem, si plures diversæ fractiones occurrerint, juvabit confusionis vitandæ gratia tollere unam post alteram. Tollitur autem fractio, quin turbetur membrorum æqualitas, si ejus denominator deleatur, & per eundem denominatorem reliqui omnes utriusque membri termini multiplicentur (120). e. g.

Si fit $\frac{ax}{2} - b = c$; sublata fractione erit $ax - 2b = 2c$.

2do. Videndum deinde est, an quantitas incognita, cujus valor quæritur, in unico duntaxat, an in utroque æquationis membro reperiatur. Si in utroque; ex uno membro transferatur in alterum mutato signo (115), ut deinceps in unico duntaxat membro compareat. At hac in translatione judicio opus est, ut nimirum ad illud membrum transferatur quantitas incognita, in quo demum valor ejus sit positivus, non negativus. e. g. Si sit æquatio $3x + b = a + x$; ex parte dextra ad sinistram transferenda est quantitas incognita x, seu scribendum $3x - x + b = a$: si enim ex parte sinistra in dextram transferretur, id est, si scriberetur $b = a + x - 3x$; facile patet fore, ut demum valor quantitatis x sit negativus. Eandem ob caussam, tametsi quantitas incognita in unico solummodo membro compareat, si tamen ea sit ibi valoris negativi, in membrum alterum mutato signo est transferenda. e. g. Si sit $a - x = b$; mox initio transferatur x ad partem alteram, ut sit $a = b + x$ (115).

3tio. Si terminis incognitam quantitatem continentibus adhæreant quantitates cognitæ, signo + vel — junctæ; eæ omnes mutatis signis transferantur ad membrum alterum (115). e. g. Si sit $ax + b - c = bd$; termini b & c mutatis signis transferantur ad partem alteram, seu scribatur: $ax = bd - b + c$.

4to. Si quantitas incognita coefficientem aliquem habeat; is coefficiens deleatur, & per eundem dividantur omnes reliqui termini membri utriusque: hoc pacto quantitas incognita liberabitur a suo coefficiente, & tamen æqualitas membrorum retinebitur (122). e. g. Si sit $2ax = b + c$; transformetur æquatio in hanc: $x = \frac{b+c}{2a}$.

5to. Si incognita quantitas a cognitis plene jam separata, ad aliquam potentiam e. g. ad quadratum elevata esse deprehendatur; ex utroque æquationis membro extrahatur radix ejus gradus, quem indicat exponens

nens potentiæ. Quæ quidem extractio in quantitate incognita reapse perficienda est methodo num. 82. allata; at in altero membro quantitates cognitas complectente sufficit nunc adhuc eandem præfixo radicali signo indicare duntaxat. e. g. Si sit demum $x^2 = a - b$; scribatur $x = \sqrt{(a - b)}$. Quodsi autem ex adverso quantitas incognita deprehendatur esse signo radicali affecta; elevetur utrumque membrum ad eam potentiam, quam indicat exponens signi radicalis. e. g. Si sit $\sqrt{x} = a + b$; erit $x = (a + b)^2$. Neutro enim casu turbari membrorum æqualitatem, num. 124. demonstratum est.

Schol. 1. Si quis in tollendis (per reg. 1mam) fractionibus compendio uti velit; cujuslibet in utroque æquationis membro fractionis numeratorem, item quamlibet utriusque membri quantitatem integram multiplicet per *factum* omnium utriusque membri denominatorum excepto denominatore proprio. e. g. Sit $\frac{a}{3} + b - \frac{c}{2} = x + \frac{d}{4}.$ Multiplicetur a per 2×4, seu per 8; b per $3 \times 2 \times 4$; c per 3×4; x per $3 \times 2 \times 4$; d per 3×2: erit $8a + 24b - 12c = 24x + 6d$.

Schol. 2. Si quantitatis incognitæ valorem demum aliqua fractio expresserit, quæ ad simpliciorem expressionem reduci possit (45), ea reductio negligenda non erit. e. g. Si per regulas præcedentes demum acquiratur $x = \frac{8a-8}{22}$; fractionis tam numeratorem, quam denominatorem per 2 dividendo, fiat $x = \frac{4a-4}{11}.$

Schol. 3. Præcedentes quinque generales regulæ memoriæ probe imprimendæ sunt, eodemque, quo propositæ sunt, ordine dato problemati applicandæ. Libeat earum ope tertiam analyseos operationem in problematum num. 111. propositorum æquationibus, n. 112. Schol. 1. inventis exercere.

PRO PROBL. I. hanc invenimus n. 112. Schol. 1. æquationem: $4x + 2b = a$.

Jam

Jam 1*ma*, & 2*da* 3tiæ hujus operationis regula hoc in exemplo non habet locum. Per 3*tiam* transponendo $2b$, eſt: $$4x = a - 2b$$

Per 4*tam* reg. dividendo per 4, eſt: $$x = \frac{a-2b}{4}$$

Seu eſt: $$x = \frac{a}{4} - \frac{b}{2}.$$

In Probl. II. erat æquatio: $$x + \frac{x}{2} + \frac{x-d}{4} = a.$$

Per reg. 1. tollen. 1. fract. eſt $$2x + x + \frac{2x-2d}{4} = 2a.$$

ſeu eſt: $$3x + \frac{x-d}{2} = 2a.$$

Tollendo fract. alteram eſt: $$6x + x - d = 4a.$$

ſeu eſt: $$7x - d = 4a.$$

Per 3 reg. transpon. $-d$, eſt: $$7x = 4a + d.$$

Per 4 reg. dividendo per 7, eſt: $$x = \frac{4a+d.}{7.}$$

In Probl. III. hæc fuit æquatio, $$2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = a.$$

Jam per reg. 1. tollendo fractiones (utamur compendio ſuperius in *Schol.* 1. allato) eſt: $$16x + 4x + 2x + 8 = 8a$$

ſeu eſt: - - - $$22x + 8 = 8a.$$

Per reg. 3 transpon. 8, eſt: - - - $$22x = 8a - 8.$$

Per reg. 4 divid. totum per 22, eſt $$x = \frac{8a-8}{22}$$

Reducendo ad ſimpl. expreſſ. eſt: - - $$x = \frac{4a-4}{11.}$$

QUARTA ANALYSEOS OPERATIO.

127. Quarta analyſeos operatio eſt *æquationis, ad unum terminum incognitum, & ſolitarium jam reductæ, in numeros reſolutio.* Scilicet poſtquam per tertiam analyſeos operationem valor incognitæ quantitatis erutus, perque noti valoris literas expreſſus eſt; literis illis valores proprii in numeris ſubſtituendi ſunt, ut

 etiam

etiam incognitæ quantitatis valor in ipsis numeris clare videatur. Lubeat praxim hujusm. resolutionis videre in problematis n. 111 propositis, quarum æquationes ultimas paullo superius (126. Schol. 3.) determinavimus.

In Probl. I. Æquatio ultima, seu ad unum terminum, & incognitum reducta, est hæc: $x = \frac{a}{4} - \frac{b}{2}$ (126. Schol. 3.). Porro hoc in problemate est $a = 800$, $b = 100$ (111): est ergo $x = \frac{800}{4} - \frac{100}{2} = 200 - 50$; adeoque est $x = 150$. Jam vero x est hæreditas primi filii, uti cit. loco ponitur: itaque primo filio obvenit hæreditas 150 florenorum. Secundus filius per conditionem problematis 100 florenis plus debuit acquirere, quam primus: secundi ergo hæreditas est 250 florenorum. Tertius tantundem acquirere debuit, quantum reliqui duo simul; adeoque hujus hæreditas est $= 150 + 250$ flor. $= 400$. flor.

In Probl. II. Ultima æquatio est: $x = \frac{4a + d}{7}$. Erat vero $a = 80$, $d = 30$ (111): est ergo $x = \frac{320 + 30}{7} = \frac{350}{7} = 50$. Porro x designat annos parentis: quibus cognitis anni filii, scilicet $x - d$, innotescunt; est enim $x - d = 50 - 30 = 20$. Hoc est, parens erat 50 annorum, filius autem annorum 20.

In Probl. III. invenimus demum esse $x = \frac{4a - 4}{11}$. Est autem hoc in problemate $a = 100$ (111): itaque est $x = \frac{400 - 4}{11} = \frac{396}{11} = 36$. Hoc est, quæsi ovicularum numerus est $= 36$.

Schol. Atque hæ sunt generales analyseos operationes, quæ in quolibet problemate resolvendo locum habent: supersunt adhuc particulares aliquæ regulæ, operationesque in certis problematum classibus observandæ, quas sequ. Cap. pertractabimus.

128.

128. Poſtquam ſolutum eſt problema, examinandum eſt, num ſolutio ſit legitima: hoc autem modo inſtituendum eſt *examen*. Singulis literis tam cognitis *a*, *b*, *c*, &c. quam etiam incognitis *x*, *y*, &c. ſed jam detectis, ſubſtituantur ſui valores numerici; tum ſingulæ problematis conditiones ponantur ob oculos: ſi numeri illi his conditionibus exacte ſatisfecerint, legitima eſt ſolutio; ſin minus, vitioſa.

e. g. In Probl. I. (111) per primam conditionem, omnium trium filiorum hæreditates ſimul ſumptæ debent eſſe = 800 florenis: invenimus autem n. 127. hæreditatem primi filii eſſe 150 flor. 2di = 250 flor. 3tii = 400 flor. Cum ergo ſit 150 + 250 + 400 = 800; primæ conditioni ſatisfit. Porro reliquæ problematis conditiones erant, ut hæreditas ſecundi 100 florenis ſit major hæreditate primi, & hæreditas 3tii æquetur hæreditatibus duorum reliquorum ſimul ſumptis: cum ergo ſit 250 = 150 + 100, & 400 = 150 + 250; etiam poſteriores hæ problematis conditiones implentur. Solutio ergo problematis fuit legitima.

CAPUT SECUNDUM.

De Analyſi Problematum Simplicium ſpeciatim.

129. Problema vel eſt poſſibile, vel impoſſibile. *Poſſibile* eſt, cujus conditiones non pugnant inter ſe, ac proinde ſolutionem admittunt, cujusmodi ſunt tria illa problemata, quæ præc. Cap. (127) ſolvimus. Problema *impoſſibile* eſt, cujus conditiones inter ſe pugnant. e. g. Si quæratur numerus, qui ſit $\frac{1}{3}$ pars numeri 6, & ſimul $\frac{1}{4}$ pars numeri 12; problema impoſſibile eſt: ejus enim conditiones inter ſe pugnant, ut expendenti patet.

130. Problematis impoſſibilitas vel illico ex ipſis conditionibus rite apprehenſis elucet; vel ſaltem per decurſum operationis ſe ſe manifeſtat, quatenus Analyſta ſuo calculo ad manifeſtum abſurdum deducitur: ut

quum e calculo prodit e. g. totum esse æquale suæ parti, esse $3 = -4$, & similia.

131. Problema possibile aliud est determinatum, aliud indeterminatum *Determinatum* est, in cujus solutione cujuslibet incognitæ quantitatis valor calculo eruitur, quin ulli incognitæ debeat valor ad arbitrium Analystæ statui. Ejusmodi sunt problemata n. 111. proposita. *Indeterminatum* contra est, in cujus solutione alicui quantitati incognitæ valor ab Analysta pro arbitrio statuitur, ac tum primum valor alterius, vel aliarum incognitarum e formulis calculo acquisitis eruitur. e. g. Si quærantur duo numeri, quorum summa sit $= 100$, quin ulla alia conditio adjiciatur; unus ex incognitis numeris erit x, alter y, eritque ex conditione problematis $x + y = 100$, adeoque $x = 100 - y$ (126. per reg. 3.). At porro in calculo progredi non est integrum, & tamen valor incognitæ x necdum patet, propterea quod ejus valorem ingrediatur incognita quantitas y. Itaque problema est *indeterminatum*, debetque Analysta quantitati y valorem statuere ad arbitrium: quo facto valorem x jam formula ipsa determinabit. Si enim ponatur y esse e. g. $= 20$; erit $x = 100 - 20 = 80$.

132. Coroll. I. Ex æquatione data eatenus eruitur valor incognitæ quantitatis, quatenus ita sensim transformatur æquatio, ut unum ejus membrum solitaria quantitas incognita constituat, in altero autem membro solæ quantitates cognitæ reperiantur (125), itaque ex unica æquatione duæ incognitæ quantitates innotescere minime possunt. Hinc, ut problema sit determinatum, necesse est tot adesse diversas conditiones diversis æquationibus exprimendas, quot incognitæ quantitates diversis literis expressæ in problemate continentur. Si autem plures diversæ literæ, incognitas quantitates designantes, reperiantur in problemate, quam sint conditiones diversis æquationibus exprimendæ; problema est indeterminatum.

133. Coroll. II. Quodsi plures dentur conditiones, quam sint quantitates incognitæ diversis literis exprimendæ; problema est *plus quam determinatum*. Sed hujusmodi problemata plerumque sunt impossibilia ob

pug-

pugnam conditionum, quæ eo caſu plerumque adeſt: poteſt tamen evenire nonnunquam, ut poſtquam ex neceſſariis, ſimulque ſufficientibus conditionibus valores incognitarum quantitatum erutæ ſunt, reliquæ etiam ſuperfluæ conditiones verificentur.

134. Problemata tam determinata, quam indeterminata, alia ſunt ſimplicia, alia compoſita, ſeu altioris gradus. *Simplicia* ſunt, in quorum æquationibus incognitæ quantitates ultra primam potentiam non aſſurgunt: *compoſita* autem, ſeu *altioris gradus* ſunt, in quorum æquationibus aliqua, vel aliquæ quantitates incognitæ ad quadratum, vel cubum, vel altiorem aliquam potentiam ſunt elevatæ. e. g. Problema illud, cujus hæc eſt æquatio: $x = a - b$, *ſimplex* eſt; *compoſitum* autem, ſi hac e. g. æquatione gaudeat: $x^2 - x = ab$.

Schol. Hoc Cap. nonniſi de problematis ſimplicibus acturi ſumus: ac imprimis quidem de problematis ſimplicibus determinatis, unicam incognitam quantitatem continentibus; deinde de ſimplicibus determinatis plurium quantitatum incognitarum; demum de ſimplicibus indeterminatis.

135. PROBLEMA XXXI. *Reſolvere problemata ſimplicia determinata, in quibus unica occurrit quantitas incognita.*

Resolut. Pro reſolvendis hujus generis problematis haud opus eſt aliis regulis, quam iis, ſecundum quas, generales analyſeos operationes n. 110, & ſequ. pertractatæ inſtitui debent. Itaque ſtatutis juxta num. 110 denominationibus, eruatur per n. 112 æquatio; tum per regulas n. 126. traditas ad unum terminum incognitum, & ſolitarium reducatur: denique reſolvatur in numeros (127).

EXEMPLA.

I. *Quidam interrogatus, quotnam haberet famulos, ſic reſpondit: dimidia pars meorum famulorum laborat in vinea; pars tertia piſcatur; tres autem famulos miſi venatum: jam plures non habeo. Quæritur, quotnam famulos habuerit.*

Operatio 1ma (110). Sit $3 = a$; numerus omnium famulorum $= x$: erit eorum dimidia pars $= \frac{x}{2}$, & pars tertia $= \frac{x}{3}$.

Oper. 2da (112). Quoniam adæquatum famulorum numerum juxta problematis conditionem constituunt pars eorundem dimidia, pars tertia, & præterea tres; hæc habetur æquatio: $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + a$.

Operat. 3tia (125). Per reg. 1. (126) tollendo primam fractionem, adeoque totum multipl. per 2, est: - - - $2x = x + \frac{2x}{3} + 2a$.

Tollendo fract. alteram, adeoque per 3 multiplic. est: $6x = 5x + 6a$.

Per reg. 2. transponendo $5x$, est: $6x - 5x = 6a$.

Id est: $x = 6a$.

Operat. 4ta. (127). Est $a = 3$; est ergo x, seu numerus famulorum $= 18$.

Examen (128). Cum sit $x = 18$; est $\frac{x}{2} = 9$ & $\frac{x}{3} = 6$. Igitur hos valores literis substituendo in æquatione, quam *operat.* 2da invenimus, deberet esse $18 = 9 + 6 + 3$. Quæ æquatio cum stet, solutionem legitimam esse evincit.

II. *Abiit Tyrnavia Cajus Romam ante dies* 6, *qui singulis diebus emetitur milliaria* 3: *nunc Titius itidem Tyrnavia Romam movet, idem accurate iter, quod Cajus, emensurus, at singulis diebus confecturus milliaria* 5. *Quæritur, intra quot dies sit Titius Cajum assecuturus.*

Sit $6 = a$. $3 = b$, $5 = c$, quæsitus dierum numerus $= x$. Clarum est, duos hos peregrinos eo temporis momento conventuros, quo milliaria ab utroque emensa fuerint totidem; itaque amborum milliaria algebraice exprimenda sunt, & inter se æquanda. Porro Cajus intra dies a, Titii iter præcedentes, confecit milliarium numerum $= ab$, confecturus adhuc intra dies x milliarium

rium numerum $= b\,x$: hinc numerus milliarium a Cajo, dum ipsum Titius assequatur, emetiendorum est $= a\,b + bx$. Titius, qui, antequam Cajum assequatur, perget tantum diebus x, conficiet milliarium numerum $= cx$. Hanc itaque habemus æquationem:

$$cx = ab + bx$$

Transponendo bx (nam $cx > b\,x$) est: $cx - b\,x + ab$;
Dividendo totum per $c - b$ (28. reg. 1.) est:

$$x = \frac{a\,b}{c - b}.$$

Æquationem resolvendo in numeros, est $x = \dfrac{6 \times 3}{5 - 3}$.

Seu est $\quad x = \dfrac{18}{2} = 9.$

III. *Data summa, & differentia duorum numerorum invenire numeros ipsos.*

Sit summa data $= s$, differentia $= d$. Numerus quæsitus major sit $= x$: eo ipso numerus minor est $= x - d$. At idem numerus minor est etiam $= s - x$; si enim ex summa duorum inæqualium numerorum subtrahatur numerus major, clarum est, remanere debere numerum minorem. Itaque est:

$$x - d = s - x \text{ (101).}$$

Transpon. imprimis $- x$, deinde $- d$, est:

$$2x = s + d;$$

Dividendo per 2, est $\quad x = \dfrac{s + d}{2}.$

Hoc est, *generatim quicunque duo inæquales numeri assumantur; semper numerus major est æqualis ipsorum semisummæ addita semidifferentia.*

Porro: numerus minor est, uti diximus, $= x - d$, ac proinde loco x substituendo valorem nunc inventum, est numerus minor $= \dfrac{s + d}{2} - d$. Totum hoc multiplicando per 2, acquiritur numeri minoris duplum $= s + d - 2d = s - d$ (8): quod duplum si dividatur per 2, acquiritur numerus minor $= \dfrac{s - d}{2}$.

Hoc est, *generatim quicunque duo inæquales numeri assumantur, semper minor est æqualis ipsorum semisummæ dempta semidifferentia.*

e. g. Si assumantur numeri 12 & 8, quorum semisumma est $= 10$, semidifferentia $= 2$; erit major, seu $12 = 10 + 2$, & minor, seu $8 = 10 - 2$.

Schol. Duo adhuc exempla subjicimus; sed compendio, ut Tirones in iis uberius se se exercere queant.

IV. *Interrogatus quispiam, quotnam florenos lucratus sit, respondit: $\frac{2}{3}$ partes mei lucri additis ejusdem lucri $\frac{3}{4}$ partibus efficiunt 34 florenos. Quæritur, quotnam is florenos sit lucratus.* Sit $34 = a$, numerus quæsitus x; est per conditionem problematis $\frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = a$. Hinc $x = 24$.

V. *Aliquot milites certam aureorum summam hosti ereptam habuerunt inter se æqualiter dividendam. Primum tentarunt singuli accipere ex summa aureos 7; at 5 aureos experti sunt deesse sibi ad æquam divisionem: dum autem tentarunt singuli accipere aureos 6; exacte successit divisio, quin ullus ex summa aureus aut deesset, aut superesset. Quæritur, quotnam fuerint millites illi.* Sit numerus militum $= x$; ex conditione problematis hæc obtinetur æquatio: $7x - 5 = 6x$. Hinc $x = 5$. Unde innotescit etiam numerus aureorum $= 5 \times 6 = 30$.

136. Si in quopiam problemate determinato plures occurrant quantitates incognitæ, adeoque etiam æquationes (132); fere quælibet id genus æquatio plures, quam unam, complectitur incognitas quantitates. Jam vero ex æquatione plures incognitas quantitates complectente nullius incognitæ quantitatis valor potest erui; quia nequit ejusmodi æquatio ita transformari, ut unum ejus membrum unica incognita quantitas solitaria constituat, in altero autem membro solæ cognitæ quantitates reperiantur. Itaque ex qualibet id genus æquatione eliminandæ sunt incognitæ quantitates præter unicam, ac tum demum unicæ hujus relictæ valor ex ea æquatione eruendus. Praxim hujus eliminationis dabit sequens.

137.

137. PROBLEMA XXXII. *Si dentur duæ æquationes eandem incognitam quantitatem complectentes; quantitatem illam incognitam ex alterutra ipsarum eliminare.*

Resolut. Plures id genus eliminationis praxes habentur, quarum jam hanc, jam illam pro variis problematum propositorum adjunctis Analysta usurpare poterit. *1ma* praxis est per *substitutionem*: si nempe valor cujusdam incognitæ quantitatis ex una æquatione erutus in altera eidem incognitæ substituatur. e. g. Ponamus aliquod problema per *2dam* analyseos operationem in has duas æquationes resolvi: $x + y = a$, & $3x = 2y$. In priore transponendo y, acquiro $x = a - y$: quem valorem si loco x substituam in altera æquatione, loco $3x = 2y$ acquiro $3a - 3y = 2y$; hoc est, incognitam x hoc pacto ex æquatione altera elimino.

2da praxis est per *compositionem* duarum quantitatum uni eidemque tertiæ æqualium: scilicet si e duabus æquationibus totidem valores ejusdem incognitæ eliciantur, & in unam æquationem componantur. e. g. In exemplo pro prima praxi allato, prima æquatio in hanc transformari potest: $x = a - y$; altera in hanc: $x = \frac{2y}{3}$; scilicet ope theorematum, & regularum ad *3tiam* analyseos operationem pertinentium. Hoc est, duo diversi ejusdem incognitæ x valores acquiruntur: qui cum inter se æquales esse debeant (101), in hanc æquationem incognita x jam carentem componi possunt: $a - y = \frac{2y}{3}$.

Curandum autem est, ut duo diversi ejusdem incognitæ valores, in novam æquationem componendi, ex ejusmodi duabus diversis æquationibus eruantur, quarum una non dependeat ab altera, seu quarum una in alteram ope generalium regularum (126) transformari non possit: secus enim valores illos componendo ejusmodi æquatio acquiretur, cujus membra post varias transformationes demum utrinque fient æqualia nihilo; cujusmodi æquatio solvendo problemati apta prorsus non est. Sic si quis ex his duabus æquationibus: $a +$ $2x$

$2x = c - y$, & $\frac{a}{2} + x = \frac{c-y}{2}$ (quarum prior in alteram, dividendo per 2, transformatur) duos diversos incognitæ x valores eruere, eosque in novam æquationem, e qua deinde alterius incognitæ y valorem detegat, componere vellet; irrito conatu laboraret, ut periclitanti patebit.

3*tia* praxis est per *additionem* unius æquationis ad alteram. e. g. Si in aliquo problemate hæ duæ æquationes inveniantur: $x + y = a$, & $x - y = b$; addendo sibi has duas æquationes, erit $x + y + x - y = a + b$, seu erit $2x = a + b$: si enim æqualibus addantur æqualia, manent æqualia. Consequenter acquiritur nova æquatio, in qua incognita y non amplius comparet. At hæc praxis nonnisi tunc potest adhiberi, quum per additionem id obtinetur, ut quantitas incognita ob contraria sua signa, quorum unum in una, alterum in altera æquatione habuerat, se se elidat.

4*ta* praxis est per *subtractionem* unius æquationis ab altera. e. g. Sint rursus in aliquo problemate hæ duæ æquationes: $x + y = a$, & $x - y = b$. Posteriorem a priore subtrahendo acquiritur residuum $= x + y - x + y = a - b$; seu acquiritur $2y = a - b$. At neque hanc praxim posse semper exerceri, clarum est: ut adeo plerumque alterutra e duabus primis sit arripienda.

138. PROBLEMA XXXIII. *Resolvere problemata simplicia determinata, in quibus plures occurrunt quantitates incognitæ.*

Resolut. 1) Per primam generalem analyseos operationem fiant denominationes more consueto (110). e. g. Sit propositum sequens problema: *Mater de trium filiorum ætate rogata respondet: primus cum secundo habet annos 25; secundus cum tertio annos 60; tertius cum primo annos 37. Quæritur ætas singulorum.* Sint anni primi filii $= x$, secundi $= y$, tertii $= z$; $25 = a$, $60 = b$, $37 = c$.

2) Operatione altera totidem æquationes eruantur e datis conditionibus, quot fuerint quantitates incognitæ diversis literis denominatæ. Atque adeo in assumpto exemplo tres eruendæ sunt æquationes: nempe ex pri-

prima conditione hæc: $x + y = a$; ex secunda hæc: $y + z = b$; ex tertia denique hæc: $x + z = c$.

3) Quod ad tertiam analyseos operationem attinet: in id incumbendum est, ut æquationes datæ reducantur ad unam, in qua nonnisi unica incognita reperiatur, ceteris eliminatis; tum ex nova hac æquatione valor ejus incognitæ, quæ in ea adhuc continetur, eruatur. Id genus reductio praxibus n. 137 allatis, accedente Analystæ judicio, frequentioreque exercitio haud difficulter peragetur.

e. g. In assumpto exemplo, ut eliminetur imprimis incognita x, duo ipsius valores, tametsi ab incognita nondum liberi, eliciantur, primam æquationem transformando in hanc: $x = a - y$, tertiam vero in hanc: $x = c - z$. Hos duos ejusdem x valores componendo acquiritur nova æquatio: $a - y = c - z$, in qua incognita x jam non comparet. Deinde ut acquiratur æquatio, in qua neque x, neque y compareat; æquatio nunc inventa transformetur in hanc: $y = a - c + z$, & æquatio secunda $y + z = b$ in hanc: $y = b - z$: hoc pacto acquiruntur duo valores ejusdem incognitæ y, solam incognitam z complectentes; quos valores componendo exurgit hæc æquatio: $a - c + z = b - z$, in qua jam neque x, neque y, sed sola incognita z reperitur.

Habita hac æquatione, valor incognitæ z jam per solas generales tertiæ operationis leges n. 126 allatas erui potest: juxta quas ea æquatio in hanc demum abit: $z = \frac{b - a + c}{2}$. Porro invento valore incognitæ z, facile jam innotescunt valores etiam incognitarum x & y: at compendii gratia eos in solis numeris sequente operatione invenire satis erit.

4) Quarta analyseos operatio (127) hoc modo instituenda est. Valor unius ex incognitis operatione præcedente plene detectus resolvatur in numeros methodo consueta; tum valor ille numericus substituatur eidem incognitæ in æquatione altera, alterius incognitæ valorem exprimente: hoc pacto jam alterius quoque incognitæ valor innotescet, & sic porro. Sic in as-

assumpto exemplo valor incognitæ z in numeros resolutus, est $= 36$; qui valor si in æquatione $y = b - z$ loco z substituatur, erit $y = b - 36 = 60 - 36 = 24$. Denique si porro valor iste in altera æquatione $x = a - y$ loco y substituatur; erit $x = a - 24 = 25 - 24 = 1$. Itaque jam omnium incognitarum valores detecti sunt: est nempe $x = 1$, $y = 24$, $z = 36$.

EXEMPLA ALIA.

I. *Herus cum suo servo hoc pactum iniit: pro quolibet die, quo laboraveris* (inquit herus ad servum) *præter victum acquires a me 3 grossos: ex adverso singulis diebus, quibus feriatus fueris, tu mihi pro victu 7 grossos solves. Elapsis a pacto diebus 50 nihil servo debebatur, nec servus quidquam hero debuit. Quæritur, quot diebus laboraverit servus, quot item diebus feriatus fuerit.*

Operat. 1*ma*. Ponamus $50 = a$, dies laboris $= x$, dies feriarum $= y$. Expendenti facile patet, solutionem problematis connexam esse tam cum summa grossorum laborando acquisitorum a servo, quam etiam cum summa grossorum ab eodem feriando perditorum: ac pr inde utraque summa denominetur, oportet. Est autem prior summa $= 3x$, posterior $= 7y$.

Oper. 2*da*. Juxta conditionem problematis dies laboris, & feriarum simul sumpti erant $= 50$; est ergo $x + y = a$. Deinde summa grossorum laborando acquisitorum erat æqualis summæ grossorum feriando perditorum; elapsis enim 50 diebus nec herus servo, nec iste illi debuit quidquam: est ergo $3x = 7y$.

Operat. 3*tia*. Ex æquatione prima acquiritur $x = a - y$. Hic valor si in æquatione altera loco x substituatur, est $3a - 3y = 7y$. Ex æquatione hac per communes regulas (126) invenitur valor incognitæ y: est enim demum $y = \frac{3a}{10}$. Valor x compendii gratia solum in numeris sequ. operat. eruetur.

Ope-

Operat. 4ta. Literis numeros subſtituendo, eſt $y = \frac{3 \times 50}{10} = 15$. Qui valor ſi in æquatione $x = a - y$ loco y ſubſtituatur, eſt $x = a - 15 = 50 - 15 = 35$. Hoc eſt, ſervus ille 35 diebus laboravit, & 15 diebus feriatus eſt.

II. Euclides hoc olim ænigma propoſuiſſe fertur: *Ibant Mulus, & Aſina vinum portantes: Aſinæ ſub pondere ingemiſcenti ait Mulus: quid ita lamentaris? Si e vino, quod portas, menſuram unam mihi dederis; onus meum erit duplo majus, quam tuum: ſin tu a me unam menſuram acceperis, æqualia pondera feremus. Quæritur, quot menſuras Mulus, quot item Aſina bajulaverit.*

Numerus menſurarum onus muli conſtituentium ſit $= x$, & numerus menſurarum aſinæ impoſitarum ſit $= y$. Imprimis ſi aſina menſuram unam mulo daret; muli onus eſſet $= x + 1$, aſinæ autem remaneret onus $= y - 1$: porro hac menſuræ translatione facta, onus muli per 1mam problematis conditionem duplo majus eſſet, quam aſinæ, adeoque eſſet æquale oneri aſinæ per 2 multiplicato; eſt ergo $x + 1 = 2y - 2$. Quodſi autem mulus aſinæ menſuram daret; aſinæ onus eſſet $= y + 1$, mulo autem remaneret onus $= x - 1$: porro hoc caſu per alteram probl. condit. æqualia eſſent ipſorum onera; eſt ergo $x - 1 = y + 1$. Jam ex priore æquatione acquiritur $x = 2y - 3$: qui valor ſi in æquatione altera loco x ſubſtituatur, eſt $2y - 4 = y + 1$. Hinc $y = 5$. Qui valor ſi loco y ſubſtituatur in æquatione $x = 2y - 3$, patet eſſe $x = 7$.

III. *Quidam certam puræ ſiliginis menſuram ſolet vendere* 22 *groſſis, & eandem puri tritici menſuram* 38 *groſſis: cuperet autem ita commiſcere ſiliginem cum tritico, ut menſura mixti frumenti, ſervato priore utriusque pretio, valeat* 30 *groſſos. Quærit itaque, quotamnam menſuræ partem debeat efficere ſiligo, quotam triticum.*

Sit $22 = a$, $38 = b$, $30 = c$; pars menſuræ, quam ſiligo efficere debet, ſit $= x$, quam autem efficere debet triticum, ſit $= y$. Imprimis erit $x + y = 1$; nam quæſitæ portiones ſiliginis & tritici ſimul ſumptæ per con-

condit. probl. debent efficere menſuram unam. Deinde pretium ſiliginis in ea menſura contentæ erit $= ax$, & pretium tritici $= by$: hinc quoniam mixti frumenti menſura integra debet 30 groſſos valere, erit $ax + by = c$. Jam ex æquatione prima acquiritur, $x = 1 - y$: qui valor ſi in æquatione altera loco x ſubſtituatur, erit $a - ay + by = c$. Unde per communes regulas (126) demum acquiritur $y = \frac{c-a}{b-a} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. Hic valor ſi loco y ſubſtituatur in æquatione $x = 1 - y$; patet eſſe etiam $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Hoc eſt, una dimidia pars ex ſiligine, & altera dimidia pars ex tritico eſt accipienda.

IV. *Quidam volens emere ſacharum vidit ad 7 libras ſachari exſolvendas deeſſe ſibi 2 florenos: itaque nonniſi 4 libras emit; quibus exſolutis reſiduos adhuc habuit 5 groſſos. Quæritur imprimis, quanti fuerit una libra ſachari, deinde quantum pecuniæ is emptor habuerit.*

Omnem pecuniam in groſſos reſolvamus, adeoque 2 florenos in 40 groſſos. Sit autem $40 = a$; pretium ſachari in groſſis ſit $= x$, pecunia tota emptoris itidem in groſſis ſit $= y$. Eſt imprimis $7x = y + a$; eſt deinde $4x = y - 5$. Unde $x = 15$, & $y = 65$. Hoc eſt, ſachari libra vendebatur 15 groſſis, & emptor habuit 65 groſſos, ſeu 3 florenos, 5 groſſos.

V. *Determinare generatim* factum *duorum numerorum, quorum uterlibet decade ſit minor: e. g. quantum ſit ſepties octo.* Unius numeri a decade differentia ſit $= x$, alterius $= y$. Erit prior numerus $= 10 - x$, poſterior $= 10 - y$; conſequenter *factum* ipſorum ($10 - x$ multiplicando per $10 - y$) erit generatim $= 100 - 10x - 10y + xy$. Ex cujus *facti* contemplatione hoc theorema eruitur: *Ut acquiratur factum duorum numerorum, quorum uterlibet decade ſit minor; ex* 100 *ſubtrahantur tot decades, quot ſunt unitates in utriusque numeri a decade differentia, & reſiduo addatur factum earundem differentiarum.* e. g. Quæratur, quot ſint septies octo. Numeri 7 a 10 differentia eſt $= 3$, numeri 8 $= 2$; adeoque utraque ſimul differentia eſt $= 5$, & factum earundem differentiarum eſt $= 6$. Itaque 5 decades

des (seu 50) subtrahantur a 100, & residuo $= 50$ addantur 6; acquiretur numerus $56 = 7 \times 8$.

Schol. 1. Ex hujus problematis solutione intelligi po fit theoria ejus multiplicandi praxeos, quæ vulgo *Tabula Pigri* nuncupatur. Nimirum concipe 10 depressos manuum tuarum in pugnum contractarum digitos esse totidem decades: erit *summa* per omnes simul digitos expressa $= 100$. Deinde erige tot digitos in una manu, quot unitates continet unius *factoris* dati a 10 differentia $= x$; in altera autem manu erige tot digitos, quot unitates continet alterius *factoris* dati a 10 differentia $= y$: porro erecti digiti non amplius decades, sed simplices unitates valere concipiantur. Clarum est, per residuos digitos depressos (quorum unusquisque, uti monuimus, decadem valet) exprimi summam $= 100 - 10x - 10y$; quia tot jam decades subtractæ sunt a 100, quot in utraque manu digitos erexisti. Denique si erectos unius manus digitos per erectos alterius manus digitos multiplicaveris, *factum* erit $= xy$: ii enim digiti datorum factorum a 10 differentias exprimunt. Itaque summa per depressos digitos veluti per totidem decades expressa, addito *facto* digitorum erectorum manus unius in erectos alterius manus digitos ductorum, erit $= 100 - 10x - 10y + xy$, adeoque erit ipsum *factum* ex datorum factorum multiplicatione enascens.

e. g. *Quæratur, quantum sit* 7×8. Quoniam $10 - 7 = 3$, & $10 - 8 = 2$, erige in manu una 3 digitos, in altera 2 digitos. 5 depressi digiti valent 5 decades, seu 50; quibus si addas erectorum unius manus digitorum in erectos alterius ductorum factum $= 6$, acquires $56 = 7 \times 8$. Item: *quæratur, quantum sit novies novem*, *seu* 9×9. Quoniam $10 - 9 = 1$, tam in una, quam in altera manu unicus duntaxat digitus erigatur: depressi 8 digiti valebunt 80; digiti erecti in se ducti dant factum $= 1$, nam $1 \times 1 = 1$: est itaque $9 \times 9 = 81$.

Schol. 2. Ex his facile patet, ope *tabulæ pigri* nonnisi ejusmodi factorum *factum* posse compendio obtineri,

neri, quorum neuter eſt minor numero 5, & alteruter major eodem numero 5.

139. PROBLEMA XXXIV. *Reſolvere problemata ſimplicia indeterminata.*

Resolut. Problematum indeterminatorum ſolutio iisdem legibus peragitur, quibus determinatorum; hoc uno diſcrimine, quod in problemate indeterminato ob defectum ſufficientium æquationum non poſſint omnium incognitarum valores calculo erui, ſed incognitæ cuipiam, uni, vel ſubinde pluribus etiam valor ad arbitrium Analyſtæ ſtatui debeat, atque tunc primum reliquarum incognitarum valores conſuetis analyſeos operationibus detegi poſſint.

e. g. Sit propoſitum problema ſequens. *Quidam ſtatuit* 100 *florenos expendere in coemenda triplicis ſpeciei vina. Urna unius vini venditur* 7 *florenis; alterius urna* 5 *florenis; tertii urna* 3 *florenis. Vult autem univerſe emere tantum* 18 *urnas. Quæritur, quotnam urnas accipere debeat ex prima ſpecie, quot ex ſecunda, quot ex tertia, ut pro* 18 *urnis nec plus, nec minus ſolvere debeat, quam florenos* 100.

Sit $18 = a$, $100 = b$; numerus urnarum accipiendarum ex prima ſpecie ſit $= y$, accipiendarum ex ſpecie ſecunda $= y$, ex tertia $= z$. Erit pretium primæ ſpeciei $= 7x$, ſecundæ $= 5y$, tertiæ $= 3z$: cum ergo totum pretium debeat 100 florenos æquare, erit imprimis $7x + 5y + 3z = b$. Deinde, cum urnæ coemendæ debeant eſſe 18, eſt $x + y + z = a$. Atque hæ duntaxat æquationes poſſunt ex datis conditionibus erui: hinc quoniam incognitæ ſunt tres, problema eſt indeterminatum (132).

Jam æquatio altera transformetur in hanc: $x = a - y - z$, & valor iſte in æquatione prima ſubſtituatur loco x; erit: $7a - 7y - 7z + 5y + 3z = b$.

ſeu erit: $7a - 2y - 4z = b$.

Adeoque erit: $y = \frac{7a - b}{2} - 2z$.

Atque ex poſtrema hac æquatione non amplius poteſt incoguita z eliminari, ob defectum æquationis tertiæ,

tiæ, ſed ejus valor ad arbitrium Analyſtæ determinari debet. Qua in re judicio opus eſt; ne tantus ſtatuatur valor quantitati z, ut pro alterutra ceterarum deinde ex calculo prodire debeat valor negativus, aut nihilo æqualis. Ponamus ergo eſſe $z = 3$. Hoc valore loco z ſubſtituto, poſtrema æquationum præcedentium abit in hanc: $y = \frac{7a - b}{2} - 6$.

Conſequenter valor incognitæ y jam innoteſcit: ſi enim literis numeros ſubſtituamus, eſt:

$$y = \frac{126 - 100}{2} - 6 = 7.$$

Porro ut etiam valor incognitæ x innoteſcat; in æquatione $x = a - y - z$ ſubſtituatur loco y valor nunc inventus $= 7$, & loco z valor ſuperius ad arbitrium ſtatutus $= 3$. Hoc facto erit $x = 18 - 7 - 3 = 8$. Atque ita habemus jam valores determinatos omnium trium incognitarum: ſcilicet ſi ponatur $z = 3$, eſt $y = 7$, & $x = 8$.

EXEMPLA ALIA.

I. *Sint inveniendi duo inæquales numeri, quorum facto ſi addatur ſumma, prodeant* 79.

Sit $79 = a$, unus numerus quæſitus $= x$, alter $= y$: erit eorum factum $= xy$, & ſumma $= x + y$.

Itaque per condit. probl. eſt: $xy + x + y = a$.

Tranſponendo y, eſt: $xy + x = a - y$.

Dividendo per $y + 1$, eſt $x = \frac{a - y}{y + 1}$.

Jam cum ex æquatione hac nequeat incognita y eliminari, ſtatuatur ipſi valor pro arbitratu, ſed talis tamen, qui minor ſit quam a, ne x evadat quantitas negativa. e. g. Si ponatur $y = 7$, erit $x = \frac{79 - 7}{8} = 9$.

II.

II. *Sint inveniendi duo numeri, quorum factum sit æquale duplæ summæ.*

Sit numerus quæsitorum unus $= x$, alter $= y$: erit eorum factum $= xy$, & dupla summa $= 2x + 2y$.

Itaque per condit. problem. est: $xy = 2x + 2y$.

Transponendo $2x$, est $xy - 2x = 2y$.

Ponamus jam esse $y = 3$; erit $3x - 2x = 6$, seu $x = 6$.

III. *Floreni* 100 *distribuendi sunt inter* 20 *pauperes, ita ut singuli viri acquirant flor.* 7. *singulæ mulieres flor.* 5, *& singuli pueri flor.* 1. *Quæritur numerus virorum, mulierum, & puerorum.*

Numerus virorum fit $= x$, mulierum $= y$, puerorum $= z$: fit deinde $100 = a$, $20 = b$. Erit imprimis $x + y + z = b$; erit deinde $7x + 5y + z = a$. Porro ex prima æquatione est $z = b - x - y$, & ex secunda est $z = a - 7x - 5y$. Itaque duos ejusdem z valores componendo, est:

$$b - x - y = a - 7x - 5y.$$

Transpon. b, & $- y$, item $- 7x$, est:

$$6x = a - b - 4y$$

Dividendo per 6, est, $x = \frac{a - b - 4y}{6.}$

Id est: $x = \frac{80 - 4y}{6.}$

Statuatur jam incognitæ y valor ad arbitrium, sed ita, ut deinde valor x in numeris integris absque fractione acquiratur: e. g. ponatur $y = 8$; erit $x = \frac{80 - 32}{6} = 8$. Hinc, quoniam ex prima æquatione eruitur esse $z = b - x - y$, erit $z = 20 - 8 - 8 = 4$. Hoc est, si ponatur $y = 8$, est etiam $x = 8$, & $z = 4$.

CAPUT

CAPUT TERTIUM.

De Analysi Problematum compositorum secundi gradus.

140 Si in æquatione compositæ maximus exponens quantitatis incognitæ sit $= 2$; id genus æquatio dicitur *secundi gradus;* si dictus exponens sit $= 3$, vel $= 4$ &c. æquatio est 3*tii*, vel 4*ti* &c. gradus. Nos, qui solis Tironibus scribere statuimus, prætermissis altiorum graduum æquationibus, utpote quarum resolutionem sublimior Analysis sibi vendicat, nonnisi methodum solvendi æquationes secundi gradus strictim exponemus.

141. PROBLEMA XXXV. *Resolvere problemata determinata secundi gradus.*

Resolut. *Prima*, & *secunda* analyseos operatio (110, & 112) more consueto peragatur: *tertia* vero operatio, seu æquationis ad unum terminum incognitum, & solitarium reductio (125) his legibus fiat.

1*mo*. Per communes leges in præcedentibus traditas, & hactenus usurpatas ita transformetur æquatio, ut in uno æquationis membro sit imprimis quadratum incognitæ, per nullam quantitatem multiplicatum, vel divisum, deinde omnes illi, siqui adsint, termini, in quibus eadem incognita, sed simplex comparet; in altero autem membro meræ cognitæ quantitates contineantur. Hinc si plures diversæ incognitæ adfuerint in æquatione problematis; consueta incognitarum *eliminatio* (137) instituenda est, priusquam ad sequentes regulas transeatur. Porro dicta æquationis transformatio ita instituenda est, ut imprimis quadratum incognitæ sit positivum, cum nullum quadratum possit esse negativum, uti ex n. 21. *reg.* 2. intelligere licet; deinde ut idem quadratum in eo æquationis membro, ad quod pertinet, primo loco scribatur. e. g. Si per 2dam analyseos operationem hæc obtineatur æquatio: $4ax = 2b - 2x^2$; ea per communes regulas (126) eous-

que transformanda eſt, dum in hanc demum abeat: $x^2 + 2ax = b$.

2do. Exacta ad regulam primam æquatione, ſi in uno æquationis membro ſolum incognitæ quadratum fuerit repertum; facile jam abſolvitur reductio: nihil enim amplius reſtat faciendum, quam extrahenda eſt utrinque radix quadrata (126. reg. 5). Quæ quidem radix ex quadrato incognitæ *reapſe* extrahatur (82): in altero autem æquationis membro extractio radicis nunc adhuc *indicetur* duntaxat, præfixo radicali ſigno. e. g. Hæc æquatio: $x^2 = a - b$ in hanc commutetur: $x = \surd (a-b)$.

3tio. Quodſi autem in uno æquationis ad primam regulam jam exactæ membro quadratum incognitæ habuerit adnexos ſibi alios terminos (unum vel plures) incognitam ſimplicem continentes, uti ſuperius in exemplo regulæ *1mæ* videre eſt; hoc modo procedatur: quadratum incognitæ habeatur pro primo membro quadrati binomiam radicem habentis, quod membrum in formula generali (83) per a^2 repræſentatur; reliqui adjuncti termini, incognitam ſimplicem continentes, conſiderentur ut alterum ejusdem quadrati membrum, in formula generali (83) per $+ 2ab$, vel per $- 2ab$ repræſentari ſolitum. Hoc pacto illud æquationis membrum erit quadratum *incompletum* radicis binomiæ: ſcilicet carebit ſolo quadrato termini ſecundi radicis. e. g. In hac æquatione: $x^2 - 4ax = 2b - 4a^2$, habeatur x^2 pro primo, & $- 4ax$ pro ſecundo quadrati binomiam radicem habentis termino, in formula generali (83) per $- 2ab$ repræſentari ſolito; primam æquationis membrum $x^2 - 4ax$ erit quadratum incompletum radicis binomiæ, in quo ſolum quadratum ſecundi termini radicis, per b^2 repræſentari ſolitum deſideretur.

Jam ut valor incognitæ in hujusmodi æquationibus detegatur; id genus quadratum incompletum prævie complendum eſt: quæ completio priusquam per ſequentem regulam 4tam, aut 5tam peragatur, hæc facienda ſunt: 1) extrahatur radix ex eo termino, qui pro primo quadrati binomiam radicem habentis membro aſſumptus eſt, ſeu in aſſumpto exemplo ex x^2; radix illa erit primus radicis binomiæ terminus (83): 2) per

per duplum hujus termini primi dividatur alterum quadrati binomiam radicem habentis membrum, nempe in aſſumpto exemplo dividatur $-4ax$ per $2ax$; quotus enaſcens (qui in aſſumpto exemplo eſt $-2a$) erit ſecundus radicis binomiæ terminus (83). Porro hæc radix binomia notetur ad latus folii; tum ſecundus ejusdem radicis terminus elevetur ad quadratum, quod pariter notetur. In aſſumpto exemplo radix binomia eſt $= x - 2a$; adeoque quadratum ſecundi termini eſt $+ 4a^2$.

4to. His peractis inveſtigetur, num quadratum termini ſecundi radicis nunc inventæ reperiatur in altero æquationis membro, meras cognitas quantitates continente, idque cum ſigno negativo, an non. Et ſiquidem repertum fuerit, transferatur mutato ſigno ad membrum illud, quod incognitas continet. Hoc facto illud æquationis membrum, quod incognitas continet, jam erit *completum* quadratum, cujus radix binomia per reg. tertiam determinata jam eſt: quippe præter quadratum termini primi radicis, & duplum termini primi in ſecundum ductum aderit jam in eo membro etiam quadratum termini ſecundi radicis. Sic in exemplo regulæ 3tiæ, ſeu in æquatione $x^2 - 4ax = 2b - 4a^2$, quadratum ſecundi termini radicis, quod eſt $= 4a^2$ reperitur inter cognitas quantitates cum ſigno negativo: quo quadrato in aliud æquationis membrum translato, ita ut ſit $x^2 - 4ax + 4a^2 = 2b$, membrum illud æquationis jam evadit completum quadratum radicis binomiæ $x - 2a$: quippe continet imprimis primi termini radicis quadratum $= x^2$, deinde duplum termini primi in ſecundum ductum $= -4ax$, denique termini ſecundi quadratum $= + 4a^2$; quæ partes ſimul ſumptæ conſtituunt completum quadratum radicis binomiæ (83).

Itaque extrahatur utrinque radix quadrata: ac ejus quidem membri, quod completum quadratum eſt, radix quadrata jam per 3tiam regulam innotuit; in altero autem æquationis membro extractio radicis nunc adhuc indicetur duntaxat, præfigendo ſignum radicale. e. g. Aſſumpta ſuperius æquatio $x^2 - 4ax + 4a^2 = 2b$ transformetur in hanc: $x - 2a = \sqrt{2b}$. Quo facto facile jam reducitur æquatio ad unum incognitum, &

solitarium terminum, si nempe $-2a$ transponatur, ut fit $x = \sqrt{(2b)} + 2a$.

Porro dictum est superius, investigandum esse, num quadratum termini secundi radicis reperiatur in altero æquationis membro *cum signo negativo*. Si enim ejusmodi quadrato in altero illo æquationis membro signum positivum esset præfixum; pro tertio quadrati binomiam radicem habentis membro haberi nequaquam posset. Assumamus enim hanc e. g. æquationem: $x^2 - 4ax = 2b + 4a^2$. Tametsi $+4a^2$ sit re ipsa quadratum secundi termini; si tamen mutato signo ad alterum æquationis membrum transferretur, ut fit $x^2 - 4ax - 4a^2 = 2b$, in eo membro quadratum binomiæ radicis non compleret: nam $-4a^2$ non potest esse quadratum termini secundi, cum nec positivus, nec negativus terminus possit habere quadratum negativum (21. *reg.* 2).

5*to*. Quodsi autem peractis iis, quæ regula 3tia exigit, quadratum secundi termini radicis in altero æquationis membro solas quantitates cognitas continente non reperiatur cum signo negativo; quadratum illud cum signo positivo addatur utrique æquationis membro. Hoc pacto *complebitur* in uno æquationis membro quadratum radicis binomiæ, ut clarum est, & simul membrorum æqualitas retinebitur. e. g. Sit $x^2 + 2ax = b$. Assumatur (per *reg* 3*tiam*) x^2 pro primo quadrati binomiam radicem habentis membro, & $+ 2ax$ pro secundo. Erit primus radicis binomiæ terminus x; per cujus duplum, seu per $2x$ si dividatur $+ 2ax$, obtinebitur secundus radicis terminus $+ a$: adeoque tota radix erit $= x + a$, & quadratum secundi termini radicis erit a^2. Jam quadratum istud, cum non reperiatur in altero æquationis membro, addatur utrique membro æquationis, ut fit $x^2 + 2ax + a^2 = b + a^2$: hoc pacto primum æquationis membrum erit completum quadratum radicis binomiæ $x + a$. Hinc extrahendo utrinque radicem quadratam, erit $x + a = \sqrt{(b + a^2)}$, & transponendo a, erit demum $x = \sqrt{(b + a^2)} - a$.

Quarta analyseos operatio more consueto fit, literis numeros substituendo (127). e. g. In æquatione $x = \sqrt{}$ $(b +$

$(b + a^2) - a$ fit $a = 5$. $b = 24$: erit $x = \sqrt{(24 + 25)} - 5 = \sqrt{(49)} - 5 = 7 - 5 = 2$.

Schol. Ex his intelligere jam licet, quidnam fit quadratum *incompletum*, & quando, ac quomodo *compleri* debeat. Scilicet, quando in æquatione fecundi gradus (ut de altioribus æquationibus nihil dicam) ad regulam primam fuperius allatam exacta, membrum unum præter quadratum incognitæ adnexos habet alios etiam terminos (unum vel plures) eandem incognitam, fed fimplicem continentes; membrum illud eft quadratum incompletum radicis binomiæ: nam continet quidem quadratum termini primi radicis, & duplum termini primi ductum in terminum fecundum, ut ex tertia regula intelligi poteft; at caret quadrato termini fecundi. Hoc ergo cafu *compleri* debet ejusmodi quadratum; fecus enim ex eo radix extrahi non poffet retenta membrorum æqualitate, quæ tamen extractio ad detegendum incognitæ valorem neceffaria eft. Hoc autem ordine proceditur in complendo quadrato: per regulam etiam Invenitur uterque radicis terminus, & terminus fecundus ad quadratum elevatur; tum inveftigatur, num quadratum ifthoc reperiatur in altero æquationis membro cum figno negativo, an non. Si reperitur; regula 4ta fuppeditat methodum complendi quadratum: fin minus; regula 5ta.

PROBLEMATA *Determinata 2di gradus.*

I. *Aliquot Patresfamilias cum fuis finguli fervis ad perficiendum quodpiam opus confluxerunt. Singuli patresfamilias totidem fervos habuerunt, quot fuerunt omnes fimul patres familias: numerus autem fervorum erat* $= 625$. *Quæritur numerus patrumfamilias.*

Sit $625 = a$, numerus patrum familias $= x$. Per condit problem. eft $x^2 = a$, ut confideranti patet. Itaque (per *reg.* 2*dam*) fufficit mox utrinque radicem quadratam extrahere: ac proinde eft $x = \sqrt{a} = \sqrt{625} = 25$.

II. *Duo lufores ex theatro reduces hunc in modum fermocinantur. Primus ad fecundum: tu 4 florenis plus lucratus es, inquit, quam ego. Secundus ei refpondet: fi tam mei lucri, quam etiam tui numerus elevaretur ad*

 qua-

quadratum; duo hæc quadrata simul sumpta accurate 400 florenos efficerent. Quæritur, quot florenos primus, quot secundus sit lucratus.

Operat. 1ma. Sit $4 = a$, $400 = b$: numerus florenorum, quos primus lusor lucratus est, sit $= x$; erit numerus florenorum secundi lusoris $= x + a$.

Operat. 2da. Quadratum quantitatis x est $= x^2$, & quadratum quantitatis $x + a$ est $= x^2 + 2ax + a^2$ (83): est ergo per condit. probl. $2x^2 + 2ax + a^2 = b$.

Operat. 3tia juxta regulas paullo superius allatas facienda. Ut regulæ *1mæ* satisfiat, transponatur a^2, & tota æquatio per 2 dividatur: erit $x^2 + ax = \frac{b - a^2}{2}$. Porro si (per *reg. 3tiam*) x^2 pro primo, & $+ ax$ pro secundo quadrati binomiam radicem habentis membro assumatur; primum æquationis membrum continebit quadratum incompletum, in quo solum secundi termini radicis membrum desideretur. Itaque compleatur id quadratum hoc modo. 1) Per reg. 3tiam scribatur x pro primo radicis termino. 2) Per hujus duplum, seu per $2x$ dividatur $+ ax$, & quotus $= + \frac{a}{2}$ pro secundo radicis termino scribatur; cujus quadratum est $= \frac{a^2}{4}$. 3) Isthoc quadratum, quoniam in altero æquationis membro non reperitur, per *reg. 5tam* utrique æquationis membro addendum est, ut sit $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \frac{b - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}$. Quo facto anterius membrum æquationis jam completum quadratum est, habens radicem binomiam $x + \frac{a}{2}$. Hinc extrahendo utrinque radicem quadratam, est:

$x +$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{b - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)}.$$

Transpon. $\frac{a}{2}$ eft $x = \sqrt{\left(\frac{b - a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\right)} - \frac{a}{2}$.

Operat. 4*ta*. Literis numeros fubftituendo, eft:

$$x = \sqrt{\left(\frac{400 - 16}{2} + \frac{16}{4}\right)} - 2.$$

Seu eft: $x = \sqrt{196)} - 2 = 14 - 2 = 12$.

Itaque primus lufor lucratus eft flor. 12, alter flor. $12 + 4 = 16$.

III. *Cajus agricola ait ad Titium: ego 4 metretis minus feminavi, quam tu feminaveris; & tamen, fi metretæ fingulæ, quas feminavi, tantum procrearent, quantum tu feminafti, inferrem in horreum metretas 165. Quæritur, quot metretas feminaverit Cajus, quot metretas Titius.*

Sit $165 = a$; numerus metretarum a Titio feminatarum fit $= x$; erit numerus metretarum a Cajo feminatarum $= x - 4$. Hinc, fi metretæ fingulæ a Cajo feminatæ tantum procrearent, quartum feminavit Titius; Cajus inferret in horreum metretas $= (x - 4)\, x = x^2 - 4x$. Confequenter eft per condit. probl. $x^2 - 4x = a$.

Porro quod ad *operat.* 3*tiam* per regulas fuperius allatas inftituendam attinet: æquatio hæc ad *primam* earum regularum exacta jam eft. Per *reg.* 3*tiam* in finifteriore ejus membro habeatur x^2 pro primo quadrati binomiam radicem habentis membro, $-4x$ pro altero: erit primus radicis terminus x, & fecundus (— $4x$ per $2x$ dividendo) erit -2. Hujus quadratum $= +4$ fi utrique æquationis membro (*per reg.* 5*tam*) addatur, complebitur quadratum in dexteriore æquationis membro, eritque:

$$x^2 - 4x + 4 = a + 4.$$

Extrah. rad. quadr. eft: $x - 2 = \sqrt{(a + 4)}$.

Transponendo -2, eft: $x = \sqrt{(a + 4)} + 2$.

Con-

Confequenter ob $a = 165$, eft:

$$x = \sqrt{(169)} + 2 = 13 + 2 = 15.$$

Hoc eft, Titius feminavit 15 metretas, adeoque Cajus metretas 11.

IV. *Invenire numerum x, qui quadrato fuo additus efficiat fummam = 600.*

Sit $600 = a$; erit per condit. probl. $x^2 + x = a$.

Complendo (per *reg.* 3, & 5) quadratum erit:

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = a + \frac{1}{4}.$$

Extrah. utrinque radic. quadrat. eft:

$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{\left(a + \frac{1}{4}\right)}.$$

Transpon. $\frac{1}{2}$ eft: $x = \sqrt{\left(a + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2}.$

Loco a valorem fuum fubftit. eft:

$$x = \sqrt{\left(600 + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2}.$$

Si reducantur 600 ad fractionem ejusdem cum adjuncta fractione denominationis, eft:

$$x = \sqrt{\left(\frac{2041}{4}\right)} - \frac{1}{2}$$

Reapfe extrah. radicem quadr. eft:

$$x = \frac{49}{2} - \frac{1}{2} = 24.$$

V. *Quidam interrogatus, quotnam aureos nummos, quot item argenteos in marfupio fuo haberet, fic refpondit: fi numerus aureorum fubtrahatur a quadrato argenteorum, refiduum eft = 395; fi autem quadratum argenteorum addatur quadrato aureorum, fumma eft = 425. Quæritur, quotnam habeat aureos nummos, quot argenteos.*

Sit $395 = a$, $425 = b$, numerus aureorum $= x$, argenteorum $= y$. Eft per primam condit. probl. $y^2 - x$

$-x = a$, & per 2dam eſt $x^2 + y^2 = b$. Quoniam duæ adſunt incognitæ, alterutra eliminanda eſt. Scilicet ex prima æquatione eſt $y^2 = a + x$, & ex altera eſt $y^2 = b - x^2$. Quos duos ejusdem y^2 valores componendo eliminatur y^2, eſtque: $a + x = b - x^2$. Transponendo a & $-x^2$, eſt: $x^2 + x = b - a$. Tum per regulas ſuperius allatas continuando operationem, demum acquiritur $x = 5$. Qui, valor ſi in æquatione $y^2 = a + x$, loco x ſubſtituatur; eſt $y^2 = a + 5$: unde innoteſcit $y = 20$.

Schol. Quandoque accidit, ut æquatio ſecundi gradus inter operandum abeat in ſimplicem, quin opus ſit completione quadrati. e. g. *Quærantur duo numeri, quorum ſumma ſit = 20, & differentia quadratorum = 80.* Sit $20 = a$, $80 = b$, quæſitus numerus major $= x$, minor $= y$. Eſt per condit. probl. imprimis $x + y = a$; eſt deinde $x^2 - y^2 = b$.

Jam ex priore æquatione eruitur eſſe $x = a - y$: itaque (totum elevando ad quadrat.) eſt $x^2 = a^2 - 2ay + y^2$. Qui valor ſi in æquatione altera loco x^2 ſubſtituatur, eſt $a^2 - 2ay + y^2 - y^2 = b$; ſeu eſt $a^2 - 2ay = b$. Hoc eſt, æquatio compoſita 2di gradus jam in ſimplicem, adeoque communi methodo (138) ſolvendam abit. Qua quidem methodo reperietur demum eſſe $y = 8$, & hoc valore in æquatione $x = a - y$ loco y ſubſtituto reperietur eſſe $x = 12$.

142. PROBLEMA XXXVI. *Reſolvere problemata indeterminata ſecundi gradus.*

Resolut. Incognita quantitas, cui valor (quod nimirum ea non poſſit ex æquatione eliminari) pro arbitrio ſtatui debebit, tractetur interim inſtar quantitatis cognitæ, omnisque operatio methodo n. 141 tradita inſtituatur, dum perveniatur ad quartam analyſeos operationem. Ad hanc ubi perventum fuerit, ſtatuatur ad arbitrium valor ei incognitæ, quæ hactenus inſtar cognitæ tractabatur: at in eo valore ſtatuendo judicio opus erit, ut nimirum is valor intra limites ab intermediis æquationibus determinatos ſtatuatur, quemadmodum

dum monuimus etiam in refolutionibus problematum indeterminatorum fimplicium (139).

e. g. *Sint inveniendi duo numeri x & y, quorum factum additum quadrato primi efficiat fummam* $= 105$.

Sit $105 = a$; erit per condit. probl. $x^2 + xy = a$.

Compl. quadrat., erit. $x^2 + xy + \frac{y^2}{4} = a + \frac{y^2}{4}$.

Extrah. radic. quadr. erit: $x + \frac{y}{2} = \sqrt{\left(a + \frac{y^2}{4}\right)}$

Transpon. $\frac{y}{2}$, erit: $x = \sqrt{\left(a + \frac{y^2}{4}\right)} - \frac{y}{2}$.

Ponamus jam effe $y = 8$; erit $x = \sqrt{(105 + 16)} - 4$.

Id eft, erit: $x = 11 - 4 = 7$.

SECTIO QUARTA.
DE VARIIS QUANTITATUM RELATIONIBUS.

CAPUT PRIMUM.

De Ratione tam Arithmetica, quam Geometrica; item de Proportione Arithmetica.

143. *Ratio* eft habitudo quædam duarum quantitatum ad fe invicem comparatarum. Comparantur autem duæ quantitates inter fe, ut innotefcat, an, & quantum altera excedat alteram, vel quoties una in alia contineatur. Hinc duplex eft ratio: nempe alia eft *arithmetica*, *geometrica* alia. *Ratio arithmetica* eft habitudo duarum quantitatum quoad *differentiam*; ita ut ea differentia, quæ obtinetur unam quantitatem ab altera fubtrahendo, indicet earundem quantitatem ratio-

nem

nem arithmeticam. Sic rationem arithmeticam numerorum 8 & 10, indicat eorundem differentia = 2.

144. *Ratio geometrica* eſt habitudo duarum quantitatum quoad *quotitatem*; ita ut is quotus, qui obtinetur unam quantitatem dividendo per alteram, indicet rationem geometricam earundem quantitatum. e. g. Si quæratur ratio geometrica numerorum 2 & 6; divide 6 per 2, & quotus 3 indicabit, numerum 6 eſſe triplum numeri 2, ac proinde 2 eſſe tertiam partem numeri 6: vel vero divide 2 per 6, & quotus $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ indicabit, numerum 2 eſſe tertiam partem numeri 6, ac proinde hunc eſſe illius triplum. Unde patet, duarum quarumpiam quantitatum a & b rationem geometricam perinde innoteſcere, five a per b, five b per a dividatur.

145. Quantitates, quæ ad ſe invicem comparantur, tam in Arithmetica, quam geometrica ratione vocantur *termini*: ſcribuntur autem in eodem uterque ordine, interjectis inter ipſos duobus punctis. e. g. 2 : 6; id quod in ratione arithmetica ſic enunciatur: 2 *differt a* 6; in geometrica autem ſic: 2 *ſe habet ad* 6. Prior terminus vocatur *antecedens*; poſterior *conſequens*. Sic in ratione 2 : 6, *antecedens* eſt 2, *conſequens* autem 6.

146. PROBLEMA XXXVII. *Conſtruere formulam generalem, quæ repræſentet quamcunque rationem arithmeticam.*

RESOLUT. Cujusvis rationis arithmeticæ antecedens poteſt appellari a, differentia d. Jam conſequens vel erit major antecedente, vel minor; quippe hujusmodi comparationes nonniſi inter inæquales quantitates inſtitui ſolent. Si fuerit major; conſtabit ex antecedente addita differentia, adeoque erit $= a + d$: ſin autem minor fuerit; conſtabit ex antecedente dempta differentia, ac proinde erit $= a - d$. Ergo quævis ratio arithmetica bene repræſentatur hac formula: $a : a \pm d$; id eſt, vel hac: $a : a + d$, vel hac: $a : a - d$.

Schol. Tametſi quælibet ratio arithmetica ſeorſim conſiderata bene repræſentetur hac formula: $a : a \pm d$;

nihi-

nihilominus ſi duæ rationes arithmeticæ antecedentibus, & differentiis diſcrepantes comparentur inter ſe, non bene repræſentatur utraque per eandem formulam: ſed ſi una repræſentetur per dictam formulam, altera, quemadmodum alium habet antecedentem, & differentiam, ita per formulam aliis literis conſtantem repræſentanda erit. e. g. Antecedens alterius rationis dicatur b, differentia c: eam rationem rite repræſentabit formula, $b : b \pm c$. Quodſi tamen eadem fuerit utriusque rationis *differentia*; litera d in utraque formula retinenda erit, ita ut rationem primam formula $a : a \pm d$, alteram formula $b : b \pm d$ repræſentet.

147. Quotus ille, qui duarum quarumpiam quantitatum rationem geometricam exprimit (144), vocatur *exponens* rationis geometricæ. Jam aliqui pro *exponente* ſumunt eum quotum, qui acquiritur antecedentem dividendo per conſequentem; alii autem eum, qui naſcitur ex diviſione conſequentis per antecedentem. Uterque quotus perinde exprimit rationem geometricam duarum quantitatum ad ſe invicem comparatarum, uti n. 144 vidimus: conſequenter perinde eſt, ſive eum quotum aſſumas pro *exponente* rationis geometricæ, qui naſcitur ex diviſione antecedentis per conſequentem, ſive eum, quem dat conſequens per antecedentem diviſus. At ſi alterutrum ſemel elegeris, eundem deinceps modum conſtanter retineas, oportet. Nos conſtanter pro exponente eum quotum habebimus, qui ex diviſione conſequentis per antecedentem enaſcitur. Sic in ratione $2 : 6$, nobis exponens eſt $= \frac{6}{2} = 3$.

148. Quælibet quantitas a dicitur eo majore in ratione eſſe comparate ad aliam quampiam quantitatem b, quo eadem quantitas a comparate ad b major fuerit. Sic 1) numerus 3 comparate ad 6 eſt in majori ratione, quam comparate ad 9: nam 3 comparate ad 6 eſt $\frac{1}{2}$ pars, & comparate ad 9 eſt tantum $\frac{1}{3}$ pars. 2) Numerus 8 eſt in majori ratione comparate ad 2, quam comparate ad 4; quippe 8 eſt quadruplus numeri 2, & numeri

meri 4 eſt tantum duplus. 3) Numerus 12 eſt in majori ratione comparate ad 4, quam ſit 6 comparate ad 3; nam 12 eſt triplus numeri 4, & 6 eſt tantum duplus numeri 3 &c. Unde ſi pro exponente rationis geometricæ (uti nos conſtanter facturi ſumus) is quotus aſſumatur, qui naſcitur diviſione conſequentis per antecedentem; eo majori in ratione eſt antecedens ad conſequentem, quo minor fuerit exponens rationis, & contra. Sic ſi aſſumamus rationes 2 : 4, & 3 : 9; exponens prioris rationis eſt 2, poſterioris eſt 3: eſt autem prioris rationis antecedens in majore ratione comparate ad ſuum conſequentem, quam ſit antecedens poſterioris ad conſequentem ſuum. Contrarium obtinet, ſi conſideretur ratio conſequentis ad antecedentem: nam e. g. in aſſumptis rationibus 2 : 4 & 3 : 9, quemadmodum prioris exponens minor eſt exponente poſterioris, ita conſequens prioris in minori ratione eſt comparate ad ſuum antecedentem, ac ſit conſequens poſterioris ad antecedentem ſuum.

149. Coroll. Quoniam exponens indicat, quantanam ſit geometrica ratio duarum quarumpiam quantitatum; duas id genus rationes, quarum idem eſt exponens, æquales eſſe oportet: & viciſſim, ſi duæ quæpiam rationes ſint æquales; eundem utraque exponentem habeat, eſt neceſſe. e. g. Rationes 2 : 4 & 3 : 6, eo ipſo quod eundem habeant exponentem (nempe 2), ſunt inter ſe æquales; & quoniam ſunt æquales, diverſos habere exponentes omnino non poſſunt.

150. PROBLEMA XXXVIII. *Conſtruere formulam generalem, quæ repræſentet quamcunque rationem geometricam.*

Resolut. Cujusvis rationis geometricæ antecedens poteſt appellari a, exponens m: quibus poſitis conſequens erit am. Cum enim exponens rationis nobis ſit is quotus, qui oritur diviſione conſequentis per antecedentem (147); reapſe conſequens rationis eſt *dividendus*, antecedens *diviſor*, & exponens *quotus*: atqui *diviſor* in *quotum* ductus ſemper eſt æqualis *dividendo* (Arith. 55); quodſi ergo antecedens rationis dicatur

tur a, exponens m, confequens ejusdem rationis eft $= am$. Igitur quævis ratio geometrica bene repræfentatur hac formula: $a : am$.

Schol. Tametfi quælibet ratio geometrica feorfim confiderata bene repræfentetur per $a : am$; nihilominus fi duæ rationes geometricæ antecedentibus, exponentibusque difcrepantes repræfentandæ fint; duæ diverfæ formulæ funt affumendæ, non fecus, ac de ratione arithmetica n 146. *Schol.* locuti fuerimus. Nempe fi una id genus rationum repræfentetur per $a : am$; alterius antecedens dicatur b, exponens n, atque ita altera illa ratio repræfentetur per $b : bn$. Quodfi tamen idem fuerit utrobique *exponens*; litera m in utraque formula retinenda erit, ita ut primam rationem formula $a : am$, alteram formula $b : bm$ repræfentet.

151. THEOREMA XIV. *Si rationis cujusvis geometricæ tam antecedens, quam confequens per idem multiplicetur, aut dividatur; ratio non mutatur.*

Demonstr. Quævis ratio geometrica repræfentari poteft hac formula $a : am$ (150), & quivis multiplicator, aut divifor poteft vocari n. Jam imprimis fi rationis $a : am$ tam antecedens, quam confequens multiplicetur per idem n; nova ratio $an : amn$ eundem exponentem m habebit, quem habuit prius: fi enim amn per an dividatur, quotus eft $= m$ (27). Deinde fi tam antecedens, quam confequens rationis $a : am$ dividatur per idem n; nova ratio $\frac{a}{n} : \frac{am}{n}$ rursus eundem exponentem m habebit, quem habuit prius: fi enim fractio $\frac{am}{n}$ dividatur per fractionem $\frac{a}{n}$ quotus eft $= \frac{amn}{an}$ (60) $= m$ (45). Jam vero ratio tamdiu non mutatur, quamdiu eundem retinet exponentem (149). Veritas ergo theorematis manifefta eft.

Schol. Si cujuspiam rationis termini fuerint fractiones quæcunque; tollentur compendio fractiones illæ, fi numerator antecedentis per denominatorem confequentis, & numerator confequentis per denominatorem

rem antecedentis multiplicetur. e g. Ratio $\frac{b}{a} : \frac{d}{c}$ æquivalet huic, $bc : ad$; uti patebit, si rationis $\frac{b}{a} : \frac{d}{c}$ utrumque terminum per idem ac multiplicaveris.

152. Duæ rationes æquales *proportionem* constituunt, ut adeo proportio nihil aliud sit, quam æqualitas duarum rationum. Unde etiam duæ rationes proportionem constituentes signo $=$ ipsis interjecto jungi solent. Porro quemadmodum ratio, ita etiam proportio alia est *arithmetica*, *geometrica* alia. Scilicet duæ rationes arithmeticæ æquales, seu easdem differentia gaudentes constituunt proportionem *arithmeticam*; duæ autem geometricæ rationes æquales, seu eundem exponentem habentes (149) efficiunt proportionem *geometricam*. e. g. $3 : 5 = 7 : 9$ est proportio arithmetica, & sic enunciatur: 3 *differt a* 5 *sicut* 7 *a* 9; at e. g. $2 : 4 = 3 : 6$, est proportio geometrica, & sic enunciatur: 2 *se habet ad* 4, *sicut* 3 *ad* 6.

153. Coroll. Omnis ergo proportio quatuor habet terminos, duos nimirum antecedentes, & duos consequentes. e. g. In hac proportione $2 : 4 = 3 : 6$, 2 & 3 sunt antecedentes, 4 & 6 consequentes.

154. In qualibet proportione, tam arithmetica, quam geometrica primus terminus, & quartus simul vocantur *extremi*; secundus autem & tertius *medii* nuncupantur. e. g. In hac proportione, $2 : 4 = 3 : 6$, 2 & 6 sunt *extremi*, 4 & 3 *medii*.

155. Quælibet proportio (sive sit arithmetica, sive geometrica) vel est *continua*, vel *discreta*. Illa proportio vocatur *continua*, in qua primus consequens est idem cum secundo antecedente; & terminus ille, qui ita repetitur, *medius proportionalis* dici solet. e. g. Hæc proportio arithmetica $3 : 5 = 5 : 7$ est *continua*, estque in ea terminus 5 *medius proportionalis*. Quodsi autem consequens primus non sit idem cum antecedente secundo; proportio vocatur *discreta*, ut hæc geometrica, $2 : 4 = 3 : 6$.

156. PROBLEMA XXXIX. *Conſtruere formulam generalem, quæ repræſentet quamlibet proportionem arithmeticam.*

Resolut. Quævis ratio arithmetica una bene repræſentatur hac formula, $a : \overline{a + d}$, & altera huic æqualis hac, $b : \overline{b + d}$ (146, ejusque *Schol.*): cum ergo duæ rationes æquales conſtituant proportionem (152); quævis proportio arithmetica bene repræſentatur hac formula, $a : \overline{a + d} = b : \overline{b + d}$; id eſt, vel hac, $a : \overline{a + d} = b : \overline{b + d}$, vel hac, $a : \overline{a - d} = b : \overline{b - d}$.

157. Coroll. Quoniam in proportione continua, conſequens primæ rationis eſt antecedens rationis ſecundæ (155); in formula generali $a : \overline{a + d} = b : \overline{b + d}$, ſiquidem de continua proportione arithmetica ſit ſermo, eſt $b = \overline{a + d}$. Quem proinde valorem loco b ſubſtituendo, formula generalis quamlibet *continuam* proportionem arithmeticam repræſentans eſt hæc, $a : \overline{a + d} = \overline{a + d} : \overline{a + 2d}$.

Schol. Ceterum, quamvis iſtud ita ſe habeat; prior tamen illa formula generalis omnem proportionem arithmeticam, etiam quæ reapſe continua eſt, rite repræſentat: hoc uno notato, quod in ea, ſi de continua proportione ſpeciatim ſit ſermo, ſit $\overline{a + d} = b$.

158. THEOREMA XV. *In quavis proportione arithmetica ſumma* extremorum (154) *æquatur ſummæ* mediorum.

Demonstr. Quævis arithmetica proportio repræſentari poteſt hac formula, $a : \overline{a + d} = b : \overline{b + d}$ (156, & 157 Schol.): atqui in hac formula patet, ſummam extremorum eſſe æqualem ſummæ mediorum; in hac enim eſt $a + \overline{b + d} = \overline{a + d} + b$. Ergo in quavis proportione arithmetica &c.

159. PROBLEMA XL. *Datis tribus terminis invenire quartum arithmetice proportionalem.*

Resolut. Si dentur tres termini a, b, c, & quæratur quartus x, ſtabit hæc proportio arithmetica, $a : b = c : x$;

$c : x$; erit ergo $a + x = b + c$ (158), ac proinde erit $x = b + c - a$. Hoc eſt, ſi ſecundus,& tertius terminus in unum ſummam cogantur, & ab ea ſumma ſubtrahatur terminus primus; reſiduum erit ipſe quæſitus terminus quartus. e. g. Si dentur tres hi termini, 2, 5, 9, & quæratur quartus x; erit $x = 5 + 9 - 2 = 12$. Et ſane ſtat hæc arithmetica proportio, $2 : 5 = 9 : 12$; nam utrobique eadem eſt differentia, nimirum 3.

160. Coroll. Atque hinc facile jam intelligitur, quomodo inveniendus ſit datis duobus terminis tertius, aut inter duos datos medius arithmetice proportionalis. Scilicet ſi 1) datis duobus terminis a & b quæratur tertius x; ſtabit hæc continua proportio, $a : b = b : x$; erit ergo $a + x = 2b$ (158), adeoque erit $x = 2b - a$. Hinc ſi e. g. ſit $a = 3$, $b = 5$; erit $x = 7$.

Si 2) inter datos duos terminos e. g. inter 2 & 8 quæratur medius arithmetice proportionalis x; ſtabit hæc continua proportio arithmetica, $2 : x = x : 8$; erit ergo $2 + 8 = 2x$ (158), ac proinde erit $x = \frac{2+8}{2} = 5$.

CAPUT SECUNDUM.

De Natura, variisque Transformationibus Proportionum Geometricarum.

161. In omni quantitatum genere proportiones geometricæ ſæpiſſime in conſiderationem veniunt. Unde etiam quando vocabula *ratio, proportio, proportionalis* absque omni addito proferuntur, ea ſemper pro *geometricis* ſumuntur. Nos nobiliſſimam hanc Algebræ partem, id eſt, *proportionis geometricæ doctrinam*, qua nihil eſſe magis neceſſarium per univerſam Matheſim, Philoſophiamque naturalem, nihil in omni vitæ humanæ commercio utilius, nonniſi ignarus inficiari poteſt, hoc, & ſequ. duobus Capit. pertractabimus.

162. *Proportionem geometricam* (uti jam n. 152 dictum eſt) conſtituunt duæ rationes geometricæ æquales, ſeu eundem exponentem habentes (149). Unde

 etiam

etiam evidens proportionis geometricæ fignum eft, fi utraque ratio eundem habeat exponentem; ficut ex adverfo, fi duæ quæpiam rationes non habeant eundem exponentem, eæ veram proportionem geometricam non efficiunt.

163. PROBLEMA XLI. *Conftruere formulam generalem, quæ repræfentet quamlibet proportionem geometricam.*

Resolut. Quævis ratio geometrica una bene repræfentatur hac formula, $a : am$, & altera huic æqualis hac, $b : bm$ (150, ejusque *Schol.*): cum ergo duæ rationes geometricæ æquales efficiant proportionem geometricam (162); quævis proportio geometrica bene repræfentatur hac formula, $a : am = b : bm$.

164. Coroll. Si de continua proportione geometrica fit fermo; in formula nunc inventa, eft $am = b$ (155): tunc ergo formula generalis (loco b ponendo am) abit in hanc, $a : am = am : am^2$.

165. THEOREMA XVI. *In quavis proportione geometrica, factum* extremorum *eft æquale facto* mediorum. *Nempe fi fit*, $a : b = c : d$, *erit* $ad = bc$.

Demonstr. Quævis geometrica proportio repræfentari poteft hac formula, $a : am = b : bm$ (163): atqui hac in formula patet, factum extremorum effe æquale facto mediorum; in hac enim eft $abm = amb$: ergo in quavis proportione geometrica &c.

166. PROBLEMA XLII. *Datis tribus terminis invenire quartum geometrice proportionalem.*

Resolut. Si dentur tres termini a, b, c, & quæratur quartus x, ftabit hæc proportio geometrica, $a : b = c : x$; erit ergo $ax = bc$ (165), ac proinde erit $x = \frac{bc}{a}$. Hoc eft, fi terminus fecundus ducatur in tertium, & factum eorum dividatur per terminum primum; quotus enafcens erit ipfe quæfitus terminus quartus. e. g. Si dentur tres hi termini, 2, 4, 3, & quæratur quartus x; erit $x = \frac{4 \times 3}{2} = 6$. Et fane ftare hanc geometricam

pro-

proportionem, $2:4=3:6$ in confeſſo eſt; quippe in utraque ratione idem eſt exponens, nimirum 2.

167. Coroll. I. Itaque quicunque tres termini in proportionem ordinari poſſunt, dummodo pro quarto termino aſſumatur factum terminorum ſecundi, & tertii diviſum per terminum primum. e. g. Tres hi termini, a, b, c, in hanc proportionem ordinari poſſunt, $a:b=c:\frac{bc}{a}$ vel in hanc, $c:b=a:\frac{ab}{c}$ &c.

168. Coroll. II. Ex problemate n. 166 reſoluto facile intelligitur, quomodo inveniendus ſit datis duobus terminis tertius, aut inter duos datos medius geometrice proportionalis. Scilicet ſi 1) datis duobus terminis a & b, quæratur tertius x, ſtabit hæc continua proportio, $a:b=b:x$; erit ergo $ax=b^2$ (165), adeoque erit $x=\frac{b^2}{a}$. Hinc ſi e. g. ſit $a=2$, $b=4$; erit $x=\frac{16}{2}=8$.

Si 2) inter datos duos terminos 2 & 8 quæratur medius geometrice proportionalis x; ſtabit hæc proportio continua, $2:x=x:8$; erit ergo $x^2=16$ (165), adeoque erit $x=\sqrt{16}=4$.

169. THEOREMA XVII. *Aſſumamus quaſcunque duas quantitates æquales, quarum tam una, quam altera in duos factores reſolvatur. Quatuor hi duarum quantitatum æqualium factores ſemper ſunt reciproce proportionales: id eſt, ſemper poſſunt in proportionem ordinari ita, ut unius quantitatis factores aſſumantur pro ſolis* extremis *proportionis, alterius vero factores pro ſolis* mediis.

Demonstr. Quævis duæ æquales quantitates, quarum tam una, quam altera in duos factores reſolvi debeat, repræſentari poteſt per $AB=cd$; ergo ad theorematis veritatem generatim demonſtrandam ſufficit oſtendere, hac in æquatione factores eſſe reciproce proportionales, ſeu ſtare hanc proportionem: $A:c=d:B$. Iſtud autem ſic oſtendo. Evidens ſignum bonæ pro-

 por-

portionis geometricæ eſt, ſi utraque ejus ratio eundem habeat exponentem (162); atqui utraque hujus proportionis ratio eundem habet exponentem; nam hic exponentes ſunt $\frac{c}{A}$ & $\frac{B}{d}$ (147), quos eſſe æquales ſic declaro. Aſſumamus factum antecedentium proportionis $A : c = d : B$, quod factum eſt $A d$. Quoniam eſt ex hypotheſi $A B = cd$, utrumque dividendo per idem factum Ad, eſt $\frac{AB}{Ad} = \frac{cd}{Ad}$ (119): ergo reducendo fractiones ad ſimpliciores expreſſiones (45) eſt $\frac{B}{d} = \frac{c}{A}$. Hoc eſt, dicti exponentes ſunt æquales.

170. Coroll. I. Itaque ſi 1) ſit $CT = ct$; ſtat $C : c = t : T$. Scilicet prioris quantitatis factores C & T pro extremis proportionis aſſumendo, alterius vero factores c & t pro mediis. 2) Si ſit $abc = d^2$; ſtabit, $a : d = d : bc$. Nempe prior quantitas poteſt reſolvi in factores a & bc, pro extremis proportionis aſſumendos; alterius autem quantitatis factores ſunt d & d. 3) Si ſit $ab = c$; eſt $a : c = 1 : b$. Scilicet prioris quantitatis factores ſunt a & b, poſterioris autem ſunt c & 1.

171. Coroll. II. Evidens ſignum eſt bonæ proportionis, ſi factum extremorum ſit æquale facto mediorum. Ponamus enim, ſi fieri poteſt, non ſtare hanc proportionem, $a : d = c : b$, tametſi ſit $a b = c d$. Ea proportio non ſtabit, uti ponitur: at ſimul ſtare debet; nam æqualium quantitatum ab & cd factores ſunt reciproce proportionales, hoc eſt, in proportionem $a : d = c : b$ ordinari poſſunt (169): ergo proportio illa ſtabit, & ſimul non ſtabit, quod abſurdum eſt.

172. THEOREMA XVIII. *Si in proportione geometrica tam antecedens, quam conſequens unius ejuſdemque rationis per idem multiplicetur, aut dividatur; proportio non turbatur.* Sic ſi ſit $a : b = c : d$; primæ rationis terminos per idem m multiplicando, aut dividendo,

do, ſtabit $am : bm = c : d$, vel $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = c : d$.

Demonstr. Ratio quæcunque $a : b$ non mutatur, ſi ejus tam antecedens, quam conſequens per idem multiplicetur, aut dividatur (151): ergo ratio illa, quemadmodum ante, ita etiam poſt multiplicationem, aut diviſionem eſt $= c : d$. Adeoque veritas theorematis manifeſta eſt.

173. Coroll. Quemadmodum una ratio, ita etiam altera multiplicari, aut dividi per quamcunque quantitatem poteſt manente proportione; modo unius ejusdem rationis termini per eandem uterque quantitatem multiplicentur, aut dividantur. Sic ſi ſtat, $a : b = c : d$; licebit prioris rationis terminos per quamcunque quantitatem m, poſterioris autem terminos per quamcunque n multiplicare, vel dividere, aut unius terminos multiplicare, alterius autem dividere manente proportione. Hoc eſt, ſtabunt hæ proportiones: $am : bm = cn : dn$; $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$; $am : bm = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$ &c. Nam nulla id genus multiplicatio, aut diviſio mutat ſive priorem, ſive poſteriorem rationem (151).

Schol. Nunc recenſitas proportiones ſtare, hoc quoque modo deprehendes. Quoniam ponitur ſtare $a : b = c : d$, eſt $ad = bc$ (165). Quo notato, ſi in recenſitis proportionibus extremos inter ſe, & medios inter ſe multiplicaveris, facile deprehendes ubique factum extremorum eſſe æquale facto mediorum: quod evidens ſignum eſt bonæ proportionis (171).

174. THEOREMA XIX. *Si in quapiam proportione uterque antecedens, vel uterque conſequens per idem multiplicetur, aut dividatur; proportio illa non mutatur.* e. g. Cum ſit $2 : 8 = 6 : 24$; licebit 1) antecedentes per 3 multiplicare, ſtabitque, $6 : 8 = 18 : 24$; licebit 2) conſequentes multiplicare per 2, ſtabitque $2 : 16 = 6 : 48$; licebit 3) antecedentes multiplicare per 2, & ſimul conſequentes dividere per 4, ſtabitque $4 : 2 = 12 : 6$ &c.

DEMONSTR. Quævis proportio repræfentari poteft hac formula, $a : am = b : bm$ (163): atqui in hac formula per dictas multiplicationes, aut divifiones proportionem non turbari clarum eft; femper enim manet factum extremorum æquale facto mediorum. Sic fi 1) antecedentes per idem c multiplicentur, ut fit $ac : am = bc : bm$; erit $ambc = acbm$. Si 2) confequentes multiplicentur per c, ut fit $a : amc = b : bmc$; rurfus erit $abmc = amcb$. Si 3) antecedentes multiplicentur per c, confequentes autem dividantur per d, ut fit $ac : \frac{am}{d} = bc : \frac{bm}{d}$; eritque denique $\frac{acbm}{d} = \frac{ambc}{d}$ &c.

175. THEOREMA XX. *Poteft inverti proportio, quin mutetur; id eft, poffunt ex extremis fieri medii, & ex mediis extremi.* e. g. Si fit $a : b = c : d$; *erit* $b : a = d : c$. *Idem poteft* alternari *proportio, quin mutetur; id eft, poffunt medii manentibus extremis permutari, ita ut ex primo confequente fiat fecundus antecedens, & viciffim.* e. g. Si fit $a : b = c : d$; erit $a : c = b : d$. *Denique poffunt manentibus mediis* permutari extremi, *ita ut fi fit* $a : b = c : d$, *debeat effe etiam* $d : b = c : a$.

DEMONSTR. In omnibus his permutationibus factum extremorum manet æquale facto mediorum, atque adeo proportio perfeverat (171). Quævis enim proportio repræfentari poteft per $a : am = b : bm$ (163): jam vero fi 1) *invertendo* fiat $am : a = bm : b$, erit $abm = amb$; fi 2) *alternando* fiat $a : b = am : bm$, eft rurfus $abm = bam$; fi denique 3) *extremos permutando* fiat $bm : am = b : a$, erit $bma = amb$ (*Arith.* 43).

176. THEOREMA XXI. *In qualibet proportione, fumma vel differentia terminorum primæ rationis ita fe habet ad primum antecedentem, vel confequentem, uti fe habet fumma, vel differentia terminorum fecundæ rationis ad fecundum antecedentem, vel confequentem.* Hoc eft, fi ftat hæc proportio: - - - $a : b = c : d$; Stabunt etiam hæ:

1) Addendo: $a + b : a = c + d : c$.
Vel: $a + b : b = c + d : d$.

2)

2) *Subtrahendo*: $a - b : a = c - d : c$.
Vel: $a - b : b = c - d : d$.

DEMONSTR. Nam in omnibus his permutationibus factum extremorum manet æquale facto mediorum, ac proinde proportio non mutatur (171). Quævis enim proportio repræsentari poteſt per $a : am = b : bm$ (163). Jam vero ſi 1) fiat *addendo*, $a + am : a = b + bm : b$, vel $a + am : am = bm : bm$; aut 2) ſi fiat *ſubtrahendo*, $a - am : a = b - bm : b$, vel $a - am : am = b - bm : bm$; ſemper factum mediorum eſt æquale facto extremorum, ut periclitanti patebit. Semper ergo vera eſt proportio (171).

177. COROLL. Itaque ſi ſtat $a : b = c : d$; ſtabit etiam *mixtim* $a + b : a - b = c + d : c - d$. Nam ex modo demonſtratis ſtant hæ duæ proportiones:

$a + b : a = c + d : c$,
&, $a - b : a = c - d : c$.

Ergo *alternando* (175) ſtabunt hæ quoque:

$a + b : c + d = a : c$
& $a - b : c - d = a : c$.

Jam vero duæ rationes uni tertiæ æquales utique inter ſe quoque æquari debent (101): eſt ergo $a + b : c + d = a - b : c - d$; & altern. $a + b : a - b = c + d : c - d$.

178. THEOREMA XXII. *Non turbatur proportio, ſi omnes ejus termini ad eandem potentiam eleventur: non turbatur item, ſi ex omnibus ejus terminis eadem radix extrahatur.* Hoc eſt, ſi ſit $a : b = c : d$; eſt etiam $a^m : b^m = c^m : d^m$, item eſt $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

DEMONSTR. Si enim ſtat $a : b = c : d$; eſt $a \times d = b \times c$ (165). Hinc elevando ad quamcunque potentiam m, eſt, $a^m \times d^m = b^m \times c^m$; vel vero extrahendo quamcunque radicem n, eſt $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{d} = \sqrt[n]{b} \times \sqrt[n]{c}$ (124). Atqui prior æquatio reſolvi poteſt in proportionem hanc, $a^m : b^m = c^m : d^m$; poſterior autem in hanc, $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$ (169): ergo

Schol. Atque hæc de transformationibus cujusvis proportionis ſeorſim conſideratæ: ſequentia theoremata con-

continebunt transformationes ex plurium proportionum comparatione oriundas.

179. THEOREMA XXIII. *Si duarum, vel plurium proportionum antecedentes inter se, & consequentes inter se multiplicentur; facta erunt proportionalia.* Hoc est:

Si sit $a:b=c:d$,
& $e:f=g:h$;
erit etiam, $ae:bf=cg:dh$.

Demonstr. Nam in proportione, quæ ex ejusmodi multiplicatione enascitur, semper factum extremorum est æquale facto mediorum. Sic in assumpto exemplo esse $aedh=bfcg$, sic ostendo. Cum ex hypothesi sit 1) $a:b=c:d$, 2) $e:f=g:h$; erit 1) $ad=bc$, & 2) $eh=fg$ (165). Itaque æqualia per æqualia multiplicando, est quoque $ad\times eh=bc\times fg$ (119); seu est $aedh=bfcg$.

Schol. Dum dicto modo antecedentes inter se, & consequentes inter se multiplicantur; *rationes componi*, & nova proportio *compositis rationibus* oriri dicitur.

180. THEOREMA XXIV. *Si cujuspiam proportionis antecedentes per alterius antecedentes ipsis correspondentes, consequentes autem per consequentes dividantur; quoti erunt proportionales.*
Hoc est:

Si sit $a:b=c:d$,
& $e:f=g:h$;
erit etiam dividendo, $\frac{a}{e}:\frac{b}{f}=\frac{c}{g}:\frac{d}{h}$.

Demonstr. Nam in proportione, quam quoti illi constituunt, est semper factum extremorum æquale facto mediorum: ergo (171). Sic in assumpto exemplo esse $\frac{ad}{eh}=\frac{bc}{fg}$, sic ostendo. Cum ex hypothesi sit 1) $a:b=c:d$, & 2) $e:f=g:h$; est 1) $ad=bc$, & 2) $eh=fg$ (165). Itaque æqualia per æqualia dividendo, est etiam $\frac{ad}{eh}=\frac{bc}{fg}$ (119).

181.

181. THEOREMA XXV. *Sint duæ proportiones, quæ duos terminos ſibi communes habeant: una harum proportionum ſubſcribatur alteri; tum termini utrique proportioni communes ductis duabus lineolis conjungantur, ut in ſubjectis exemplis videre eſt. Jam* 1) *ſi lineæ illæ fuerint* æquidiſtantes, *ſeu parallelæ, ſimulque ſitum obliquum habuerint; reliqui quatuor termini erunt* ex æquo ordinato, *ſeu directe proportionales, ita ut reſidui duo termini proportionis unius ſint in nova proportione meri antecedentes, alterius autem proportionis reſidui duo termini ſint meri conſequentes.*

e. g. Si ſit $a:b = c:d$
& $b:f = d:g$;
erit $a:f = c:g$.

2) *Si lineæ illæ fuerint* æquidiſtantes, *ſeu parallelæ, ſimulque ſitum erectum habuerint, ſed tamen ita, ut vel ſolos antecedentes, vel ſolos conſequentes connectant; reſidui termini rurſus erunt* ex æquo ordinato *proportionales.* e. g.

Si ſit $a:b = c:d$
& $f:b = g:d$;
erit $a:f = c:g$.

3) *Si dictæ lineæ fuerint quidem parallelæ, ſituque erecto, ſed vel ſolos extremos terminos, vel ſolos medios connexuerint; reliqui termini erunt* ex æquo perturbato, *ſeu reciproce proportionales, ita ut reſidui duo termini proportionis unius ſint in nova proportione extremi, duo autem reſidui termini proportionis alterius eſſe debeant medii, aut viciſſim.* e. g. Si ſit $a:b = c:d$
$a:f = g:d$;
erit $b:f = g:c$.

4) *Denique ſi lineæ illæ fuerint convergentes, ſive ſurſum, ſive deorſum; reliqui termini pariter* ex æquo perturbato *proportionales erunt.* e. g.

Si

Si fit $a : b = c : d$

$f : a = d : g$;

erit $b : f = g : c$.

DEMONSTR. 1*mæ partis.* Si enim eſt

$a : b = c : d$.

$b : f = d : g$;

utramque proportionem alternando, prima abit in hanc, $a : c = b : d$,

altera autem in hanc, $b : d = f : g$ (175).

Itaque rationes $a : c$ & $f : g$ ſunt uni tertiæ $b : d$ æquales, ac proinde eſt $a : c = f : g$, & alternando eſt $a : f = c : g$.

DEMONSTR. 2*dæ partis* Si ſit $a : b = c : d$,

& $f : b = g : d$;

utramqua alternando, prima eſt, $a : c = b : d$

altera vero, $f : g = b : d$.

Eſt ergo $a : c = f : g$ (101), & alternando

$a : f = c : g$.

DEMONSTR. 3*tiæ partis.* Si ſit $a : b = c : d$,

& $a : f = g : d$;

med. & extr. multipl. eſt imprimis $ad = bc$, eſt deinde $ad = fg$: eſt ergo $bc = fg$ (101); atque hinc $b : f = g : c$ (169).

DEMONSTR. 4*tæ partis.* Si ſit $a : b = c : d$

$f : a = d : g$;

med. & extr. multipl. eſt in prima, $ad = bc$, & in ſecunda eſt $fg = ad$. Eſt ergo $bc = fg$ (101), & hinc $b : f = g : c$ (169).

Schol. Veritatem theorematis juverit in numeris quoque intueri. 1) Cum ſit $2 : 4 = 3 : 6$,

& $4 : 8 = 6 : 12$;

eſt ex æquo ordinato, $2 : 8 = 3 : 12$.

2)

2) Cum fit $2:4=3:6,$
& $8:4=12:6;$
eft ex æquo ordinato, $2:8=3:12.$
3) Cum fit $2:4=3:6,$
& $2:1=12:6;$
eft ex æquo perturb. $4:1=12:3.$
4) Cum fit $2:4=3:6,$
& $12:2=6:1;$
eft ex æquo perturb. $4:12=1:3.$

182. THEOREMA XXVI. *Si fuerint quotcunque rationes æquales; erit fumma omnium antecedentium ad fummam omnium confequentium, ut quiscunque antecedens ad fuum confequentem.* e. g. Si fit $a:b=c:d=e:f$; erit $a+c+e:b+d+f=a:b$.

Demonstr. Si plures rationes inter fe æquales fint; eundem omnes habebunt exponentem (149): itaque id genus rationes repræfentari poffunt his formulis generalibus:

$a:am$
$b:bm$
$c:cm$ &c. (150. *Sch.*).

Jam vero in his formulis fumma antecedentium ad fummam confequentium eft, ut quiscunque antecedens ad fuum confequentem, feu $a+b+c:am+bm+cm$ eft e. g. $=a:am$. Factum enim extremorum femper fore æquale facto mediorum, periclitanti patebit. Veritas ergo theorematis generatim patet.

CA-

CAPUT TERTIUM.

De Æqualitate Geometrica, seu Rationis.

183. Si duæ quæcunque variabiles quantitates s & c ita sint inter se connexæ, ut dum quantitas c duplo major fit, ac prius fuerit, eo ipso etiam s fiat duplo major, triplicata quantitate c triplicetur etiam s, & ita porro; rationem id genus quantitatum sæpissime per æquationem exprimunt Mathematici, & Physici, e. g. scribendo $s = c$. Cujusmodi formula non volunt illi designare arithmeticam æqualitatem inter s & c, qualis est e. g. inter bis duo & quatuor, sed *geometricam* duntaxat, & *rationis*. Hoc est, non aliud volunt designare, quam s constanter esse, ut est c, seu s esse *in ratione* ipsius c, ita ut duplicato c debeat etiam s duplicari, triplicato c, s quoque triplicetur &c. Eodem modo, si de rationis æqualitate loquendo sit $s = ct$; istud tandundem est, ac s semper esse in ratione facti illius, quod prodit, si c ducatur in t; seu duplicato hoc facto duplicari s, triplicato triplicari &c. Denique $c = \frac{s}{t}$ denotat c esse constanter, ut est quotus, qui prodit, si s dividatur per t.

184. Coroll. I. Si ergo sit universe $s = c$, & duo diversi status, seu magnitudines quantitatis s exprimantur literis S & s, status autem quantitatis c illis respondentes, literis C & c; stabit hæc proportio, $S : C = s : c$. Secus enim non esset verum, s constanter esse ut est c. Hinc *alternando* stabit etiam hæc proportio, $S : s = C : c$.

185. Coroll. II. Vicissim si fuerit $S : C = s : c$, seu alternando, $S : s = C : c$; poni potest $s = c$, semper intelligendo rationis æqualitatem. Quippe nequit dicta proportio stare, nisi sit s in ratione c. Pariter si sit $S : s = CT : ct$; est $s = ct$, &c.

Schol. Si quæcunque quantitas s sit in ratione cujuscunque alterius c; dicitur s esse *proportionalis* ipsi c, & vicissim.

186.

186. THEOREMA XXVII. *Si ita ſint comparatæ duæ quæpiam variabiles quantitates c & t, ut una creſcente, altera decreſcat, & quidem eadem prorſus ratione decreſcat, qua prior creſcit, ita ut dum t ſit duplo major, ac prius fuerit, eo ipſo c fiat duplo minor; loquendo de rationis æqualitate eſt* $c = \frac{1}{t}$.

DEMONSTR. Valor fractionis $\frac{1}{t}$ (ſi ejus numerator ſemper maneat idem) ea ratione creſcit, qua decreſcit ejus denominator t, & ea ratione decreſcit, qua creſcit idem denominator t (32): quodſi ergo etiam c ſemper ea ipſa ratione creſcat, qua decreſcit t, & ea ratione decreſcat, qua idem t creſcit; c prorſus eadem ratione creſcit, aut decreſcit, qua ratione creſcit, aut decreſcit fractio $\frac{1}{t}$. Igitur de rationis æqualitate n. 183 explicata loquendo, eſt in aſſumpta hypotheſi $c = \frac{1}{t}$.

187. Si quæcunque quantitas c ea ratione creſcat, qua decreſcit altera, ita ut ſit $c = \frac{1}{t}$, duoque diverſi ſtatus quantitatis c exprimantur literis C & c, ſtatus vero quantitatis t, illis reſpondentes deſignentur literis T & t; quatuor hi termini poſſunt in hanc ordinari proportionem, C : c = t : T, ita nimirum, ut duo heterogenei termini, ſed ſibi correſpondentes C & T pro extremis aſſumantur, alii vero duo heterogenei, pariter ſibi correſpondentes c & t pro mediis. Cum enim ſit $c = \frac{1}{t}$, eſt C : $c = \frac{1}{T} : \frac{1}{t}$ (184). Hinc 2dam rationem per Tt multiplicando (172) eſt C : $c = \frac{Tt}{T} : \frac{Tt}{t}$, ſeu eſt C : $c = t$: T (45).

188. COROLL. II. Cum in aſſumpto caſu ſit C : c = t : T; eſt invertendo, c : C = T : t (175). Hoc eſt, ſi ſit

fit $c = \frac{1}{t}$, & quatuor termini C, c, T, t, in proportionem ordinari debeant; perinde eſt, five unum, five alterum par heterogeneorum, fimulque fibi refpondentium terminorum accipiatur pro extremis, aut mediis proportionis terminis. Nempe fi e.g. C affumatur pro uno extremo, alter extremus debet effe T; fi autem c fuerit unus extremus, alter extremus nonnifi t effe poterit.

189. Si quantitas quæpiam fit in ratione alterius; ea vel eſt in ratione *fimplici*, vel *compofita*. Scilicet fi quantitas quæpiam fit tantum in ratione *unius* cujuspiam alterius quantitatis; ea dicitur effe in illius ratione *fimplici*. e. g. Si fit $c = s$; eſt c in ratione *fimplici* ipfius s. At fi quantitas quæpiam fit in ratione cujuspiam *facti*, ex multiplicatione duarum, aut plurium quantitatum in fe ductarum enafcentis; id genus quantitas dicitur effe in ratione *compofita*. e. g. Si fit $s = ct$, dicitur s effe in ratione compofita quantitatum c & t.

190. Quodfi quantitas una fit ut quadratum alterius; dicitur effe in ratione *duplicata* ejusdem: fi autem fit ut *cubus* alterius, dicitur effe in ratione *triplicata* ejusdem, & fic porro. e. g. Si fit $s = c^2$, dicitur s effe in ratione *duplicata* ipfius c: fi autem fit $s = c^3$; eſt c in ratione *triplicata* ipfius c. Si quantitas quæpiam fit ut radix quadrata alterius; id genus quantitas dicitur effe in ratione *fubduplicata* alterius: fi fit ut radix cubica alterius, eſt in ratione *fubtriplicata* ejusdem, & fic porro. e. g. Si fit $s = \sqrt{c}$, eſt s in ratione *fubduplicata* ipfius c: fi fit $s = \sqrt[3]{c}$, eſt s in ratione *fubtriplicata* ejusdem c.

Schol. Itaque cavendum eſt, ne vocabula *duplicatum, triplicatum* &c. cum *duplo, triplo* &c. & *fubduplicatum, fubtriplicatum* &c. cum *fubduplo, fubtriplo* &c. confundantur. Nam tunc quæpiam quantitas s dicitur *dupla* alterius c, quando eſt duplo major quantitate c; & tunc s eſt *fubdupla* quantitatis c, quando s eſt $= \frac{1}{2}$ parti ejusdem c.

191. Quantitas, quæ eſt in ratione alterius, five duplicata, five fimplici, vel eſt in ratione *directa* ejusdem, vel in ratione *reciproca*, feu *inverfa*. Nimirum fi quæpiam

piam quantitas s ea ratione crefcat, aut decrefcat, qua crefcit, aut decrefcit altera c, hoc eft, fi fit $s = c$ (183); dicitur s effe in ratione *directa* ipfius c. Si autem quapiam quantitate c crefcente, altera t eadem ratione decrefcat, & contra, hoc eft, fi fit $c = \frac{1}{t}$ (186); dicitur c effe in ratione *reciproca*, feu *inverfa* ipfius t.

192. Ex his jam intelligi poteft ratio fequentium apud Mathematicos, & Phyficos ufitatarum loquendi formularum. Nempe *1mo.* Si fuerit $s = c$; dicitur s effe in ratione fimplici directa ipfius c. Sic in *fumma* pecuniæ, numerus grofforum femper eft in ratione fimplici directa numeri florenorum. Cum enim duplicato florenorum numero duplicetur etiam numerus grofforum, triplicato triplicetur, & fic porro; fi numerus grofforum dicatur g, & numerus florenorum dicatur f, loquendo de rationis æqualitate eft femper $g = f$.

2do. Si fit $c = \frac{1}{t}$ (186); dicitur c effe in ratione fimplici reciproca, feu inverfa ipfius t. Sic fi aliqua linea in partes æquales dividenda fit; quoniam eo minores effe debent fingulæ partes æquales, quo plures in partes linea illa divifa fuerit, ita ut e. g. duplicato partium numero, magnitudo fingularum partium duplo minor effe debeat; magnitudo partium eft in ratione inverfa numeri earundem

3tio. Si fit $s = ct$; eft s in ratione *compofita directa* quantitatum c & t. Sic fpatium, quod a quopiam curfore conficitur, eft in ratione compofita directa celeritatis, qua curfor ille præditus eft, & temporis, quo fpatium illud conficit.

4to. Si fit $s = c^2$; eft s in ratione *directa duplicata* quantitatis c.

5to. Si fit $v = \frac{1}{d^2}$, eft v in ratione *reciproca duplicata* quantitatis d.

6to. Si fit $c = \frac{s}{t}$, feu quod idem eft, fi fit $c = s$

$\times \frac{1}{t}$; est c in ratione composita ex *directa* simplici quantitatis s, & *inversa* simplici quantitatis t. Si autem sit $v = \frac{m}{d^2}$ est v in ratione composita ex *directa* simplici quantitatis m, & *inversa* duplicata quantitatis d.

7mo. Si sit $c = \frac{\surd e}{\surd d}$; est c in ratione composita ex directa *subduplicata* ipsius e, & inversa *subduplicata* ipsius d. Si autem esset $c = \frac{e^2}{\surd d}$; esset c in ratione composita ex directa *duplicata* quantitatis e, & inversa *subduplicata* quantitatis d &c.

Schol. Si dicatur aliqua quantitas esse in ratione alterius, quin exprimatur, num sit in ratione simplici, an duplicata, aut triplicata &c. semper intelligi solet ratio *simplex*: si autem non exprimatur, sitne in ratione directa, an inversa; ratio *directa* designatur.

193. Si in quapiam formula geometricam æqualitatem exprimente reperiatur id genus quantitas, quæ variata ea quantitate, cujus valorem exprimit formula, vel per se non varietur, vel saltem ponatur non variari; quantitas illa solet vocari *constans*. e. g. Si sit $s = ct$, & variata quantitate s, vel per se maneat eadem magnitudo quantitatis c (uti sæpe evenit) vel saltem ponatur non variari; erit in ea formula c quantitas *constans*.

194. THEOREMA XXVIII. *Si in formula quapiam algebraica æqualitatem geometricam, seu rationis exprimente occurrat quæcunque quantitas* constans (193); *ea citra mutationem æqualitatis geometricæ omitti potest, modo in ejus locum substituatur unitas*. e. g. Si sit $s = ct$, & sit t constans; erit $s = c \times 1$, seu erit $s = c$. Item si sit $c = \frac{s}{t}$, & sit s constans; erit $c = \frac{1}{t}$, &c.

Demonstr. Si enim e. g. sit $s = ct$; est S : s = CT : ct (184). Jam si præterea sit T = t; *2dam* rationem per hæc æqualia dividendo, est S : s = C : c (172):

ac

ac proinde eſt $s = c$ (183). Pariter ſi ſit $c = \frac{s}{t,}$ eſtC: $c = \frac{S}{T} : \frac{s}{t;}$ hinc ſi præterea ſit $S = s$, eſt (*2dam* rationem per hæc æqualia dividendo) $C : c = \frac{1}{T} : \frac{1}{t,}$ conſequenter eſt $c = \frac{1}{t.}$

195. THEOREMA XXIX. *In formula æqualitatem rationis exprimente, poteſt utrumque membrum per idem multiplicari, aut dividi, quin rationis æqualitas mutetur,* e. g. Si ſit imprimis $s = c$, utrumque per 2 multiplic. eſt $2s = 2c$: deinde ſi ſit $s = ct$; utrumque per idem t dividendo eſt $c = \frac{s}{t.}$

Demonstr. Nam imprimis ſi ſit $t = c$; eſt $S : s = C : c$. Porro licet utramque rationem per idem multiplicare, e. g. per 2, quin turbetur proportio (173): eſt ergo $2S : 2s = 2C : 2c$; ac proinde eſt $2s = 2c$ (183).

Deinde ſi ſit $s = ct$; eſt $S : CT = s : ct$. Porro licet primam rationem per T, 2dam vero per t dividere, quin turbetur proportio: quo facto eſt $\frac{S}{T} : C = \frac{s}{t} : c$; conſequenter eſt $c = \frac{s}{t.}$

196. Coroll. Simili ratiocinandi methodo patet, etiam tum manere geometricam æqualitatem, ſi ea, quæ geometrice æqualia ſunt, per ea multiplicentur, aut dividantur, quæ nonniſi geometrice ſunt æqualia. e. g. Si loquendo de geometrica æqualitate ſit $s = c$, & $v = t$; eſt imprimis $sv = ct$, eſt deinde $\frac{s}{v} = \frac{c}{t.}$ Nam ob $s = c$ ſtat $S : s = C : c$, & ob $v = t$ ſtat $V : v = T : t$. Itaque imprimis *compoſitis rationibus* ſtat $SV : sv = CT : ct$ (179), ac proinde eſt $sv = ct$ (183): deinde

 pro-

proportionem unam dividendo per alteram ftat, $\frac{S}{V}$:

$\frac{s}{v} = \frac{C}{T} : \frac{c}{t}$ (180), confequenter eft $\frac{s}{v} = \frac{c}{t}$ (183).

Schol. Tametfi loquendo de æqualitate arithmetica *per fe* notum axioma fit, perfiftere æqualitatem, fi æqualia per idem, aut per æqualia multiplicentur, vel dividantur (119); iftud tamen comparate ad æqualitatem geometricam, feu rationis profecto non fupervacue demonftratur. Nam loquendo de æqualitate arithmetica pariter *per fe* notum axioma eft, perfiftere æqualitatem, fi æqualibus idem addatur, aut fubtrahatur (113. & 114): quod tamen non perinde fubfiftere femper, fi de fola rationis æqualitate fermo fit, inde patet, quod non femper perduret proportio, fi unius proportionis antecedentes alterius proportionis antecedentibus, confequentes autem confequentibus addantur, aut fubtrahantur. Sic tametfi ftent hæ duæ proportiones,

$$2 : 4 = 3 : 6,$$
$$\& \quad 1 : 3 = 2 : 6;$$

non ftat tamen *addendo*:

$$2 + 1 : 4 + 3 = 3 + 2 : 6 + 6,$$

neque ftat *fubtrahendo*:

$$2 - 1 : 4 - 3 = 3 - 2 : 6 - 6.$$

197. THEOREMA XXX. *In formula, rationis æqualitatem exprimente, poteft unum membrum altero intacto per quemcunque numerum multiplicari, aut dividi, quin turbetur æqualitas rationis.* e. g. Si fit $s = ct$; eft $s = \frac{ct}{2}$, item $s = 2\,ct$ &c.

Demonstr. Si eft $s = st$; ftat $S : s = CT : ct$. Jam licet 2dam rationem intacta priore per quemcunque numerum multiplicare, aut dividere, quin turbetur proportio (172); ut adeo ftent hæ proportiones, $S : s = \frac{CT}{2} : \frac{ct}{2}$, & $S : s = 2CT : 2ct$ &c. Eft ergo $s = \frac{ct}{2}$, item $s = 2ct$ &c.

198.

198. THEOREMA XXXI. *Sit quæcunque quantitas e in ratione cujuspiam quantitatis c, ita ut loquendo de rationis æqualitate (quod semper intelligendum est) sit ceteris paribus* $e = c$. *Si præterea eadem quantitas e dependeat etiam ab alia quapiam quantitate t, ita ut ceteris paribus sit* $e = t$; *reapse quantitas e erit generatim in ratione composita utriusque, seu erit* $e = ct$.

DEMONSTR. Quantitas *e*, quæ a quantitatibus *c* & *t* dicto modo dependet, seu ita, ut utrique sit proportionalis, potest considerari instar effectus a causis *c* & *t* ita dependentis, ut utrique earum sit proportionalis. Quo posito, duos diversos illius effectus status exprimamus literis E & *e*, & status caussarum illis respondentes designemus literis C, *c*, & T, *t*: ita nimirum, ut effectui E respondeant caussæ C, T, & effectui *e* caussæ *c*, *t*. Assumamus præterea novum quempiam effectum e a caussis *c* & T, quarum utrique is proportionalis sit, conjunctim agentibus oriundum. Jam si effectus e a caussis *c* & T proveniens comparetur imprimis cum effectu E, a caussis C & T oriundo; quoniam caussa T in utrumque pariter influit, evidens est, eorum discrimen pendere a reliquis caussis *c* & C, ita ut sit $e : E = c : C$. Unde est $e = \frac{Ec}{C}$.

Quodsi autem idem effectus e a caussis *c* & T proveniens comparetur cum effectu *e*, a caussis *c* & *t* oriundo; quoniam caussa *c* est utrique communis, horum discrimen pendebit a reliquis caussis T & *t*, ita ut sit $e : e = T : t$. Hinc $e = \frac{eT}{t}$.

Itaque duos ejusdem e valores conjungendo, est $\frac{Ec}{C} = \frac{eT}{t}$, & sublatis fractionibus (scilicet utrumque membrum per C*t* multiplicando, vel utendo compendio n. 126. *Schol.* 1. adnotato) est $Ect = eCT$. Unde hæc exsurgit proportio, $E : e = CT : ct$ (169); ac proinde est $e = ct$.

Schol. Veritas theorematis variis etiam exemplis illuſtrari poteſt. e. g. Contemplemur ſpatium, quod ab aliquo curſore certa celeritate æquabili prædito intra tempus quodpiam percurritur. Sit celeritas curſoris ea, qua is diebus ſingulis 8 milliaria conficiat; ponamus autem ſpatium aſſumptum percurri ab eo diebus 10. Quoniam ſpatium percurſum eſt imprimis ceteris paribus ut celeritas, qua percurritur, deinde ut tempus, quo percurritur; dictus curſor intra 10 dies conficit milliaria $= 8 \times 10 = 80$. Hoc eſt, ſpatium ab eo percurſum eſt in ratione *compoſita* celeritatis, & temporis.

199. Coroll. I. Quodſi ergo aliqua quantitas c ſit imprimis ceteris paribus ut s, deinde ut $\frac{1}{t}$; reapſe ea eſt generatim ut $s \times \frac{1}{t}$, ſeu eſt $c = \frac{s}{t}$.

200. Coroll. II. Si quæcunque ratio $a : b$ ſit imprimis ceteris paribus $= c : d$, deinde autem $= g : f$; ea reapſe eſt æqualis rationi ex utraque compoſitæ, ſeu eſt $a : b = cg : df$. Nam illæ rationes æquivalent his fractionibus, $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}, \frac{f}{g}$ (144, & 147). Porro ſi quantitas $\frac{b}{a}$ ſit imprimis ceteris paribus $= \frac{d}{c}$, deinde $= \frac{f}{g}$; eſt re ipſa per num. 198, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \times \frac{f}{g}$, ſeu eſt $\frac{b}{a} = \frac{df}{cg}$. Unde hæc exurgit proportio, $a : b = cg : df$ (144. & 147).

201. THEOREMA XXX. *Si quæpiam ratio* a : b *ſit inverſa alterius* c : d, *hoc eſt, ſi creſcente ratione* a : b, *altera* c : d *decreſcat, & viciſſim; ex duabus hujusmodi rationibus exſurgere poteſt proportio, ſi alterutrius rationis termini invertantur ita, ut ex antecedente fiat conſequens, & viciſſim.* e. g. Secundæ rationis $c : d$ terminos invertendo, eſt $a : b = d : c$.

De-

Demonstr. Si enim ratio $a:b$ eſt inverſa rationis $c:d$; reapſe fractio $\frac{b}{a}$ eſt æqualis unitati diviſæ per fractionem $\frac{d}{c}$ (186), adeoque eſt $\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$ (61 Schol. 1). Hinc autem hæc exurgit proportio, $a:b=d:c$ (144. & 147).

202. Coroll. Quodſi ergo aliqua ratio $a:b$ ſit ceteris paribus imprimis $=f:g$, ſit deinde *inverſa* rationis $c:d$; reapſe ratio $a:b$ eſt æqualis rationi ex his duabus ita compoſitæ, ut termini rationis $c:d$ invertantur: ſeu eſt $a:b=df:cg$. Si enim $a:b$ ſit inverſa rationis $c:d$; ex duabus his rationibus hæc exſurgit proportio, $a:b=d:c$ (201). Itaque in aſſumpta hypotheſi eſt $a:b$ ceteris paribus imprimis $=d:c$, deinde $=f:g$; adeoque eſt reapſe $a:b=df:cg$ (200).

CAPUT QUARTUM.

De Uſu Regulæ Aureæ.

203. Cum in humano commercio pretia duabus diverſis ejuſdem generis mercium quantitatibus reſpondentia, ſint iis ipſis quantitatibus proportionalia, pariter operariorum labor eorundem numero, nec non tempori, quo perficitur, proportione reſpondere ſoleat, & plurima id genus alia; pene innumera in uſu vitæ civilis quotidie occurrunt ſolvenda problemata, quæ ſolvere non aliud ſit, quam datis tribus terminis quartum geometrice proportionalem invenire. e. g. Si ſciam 2 ulnas panni vendi florenis 7; ut detegam, quotnam florenis vendantur 6 ulnæ ex eadem panni ſpecie, imprimis hanc inſtituere debeo proportionem, ſicut ſe habent 2 ulnæ ad 6 ulnas, ita ſe habent 7 floreni ad quæſitum florenorum numerum x: deinde debeo incognitum x, tanquam quartum geometrice proportionalem ea methodo invenire, quam num. 166 propoſuimus. Unde etiam ea methodus (ſcilicet datis tribus terminis

quartum geometrice proportionalem inveniendi) ob insignes suos in omni vita civili usus *Regula Aurea* nominari consuevit.

204. *Regula Aurea*, seu methodus datis tribus terminis quartum geometrice proportionalem inveniendi, alia est *simplex*, alia *composita*. Nempe si tres duntaxat termini dentur, ut quartus proportionalis inveniatur; regula aurea est *simplex*: *composita* autem, si quinque, aut septem termini dentur, ut incognitus ipsis proportionalis detegatur. Exemplum num. præc. allatum continet regulam auream *simplicem*; *compositæ* autem exemplum præbet hæc e. g. quæstio: *Floreni* 1500 *per annos* 6 *dant censum flor.* 450; *ergo floreni* 800 *quot florenos dabunt pro censu intra* 4 *annos?*

205. Quælibet aurea regula tam simplex, quam composita constat ex meris rationibus inter se connexis, quarum quælibet seorsim considerata terminos habeat *homogeneos*, seu ejusdem generis rem designantes. Sic in exemplo nunc (204) allato, continetur imprimis ratio 1500: 800, cujus uterque terminus designat florenos censum dantes; deinde continetur ratio 6: 4, quæ est ratio annorum; denique si terminus quæsitus dicatur x, tertia ratio 450: x est ratio florenorum censum constituentium. Rationem illam, quæ terminum incognitum x continet, deinceps rationem *quæsitam*; reliquas autem rationes, *cognitas* vocabimus.

206. PROBLEMA XLIII. *Resolvere problemata Regulæ aureæ simplicis.*

Resolut. 1mo. Terminus quæsitus vocetur x; tum ex quatuor terminis, quos problema complectitur, efformentur duæ rationes geometricæ ita, ut unam rationem duo termini inter se homogenei, & alteram itidem duo termini inter se homogenei interjectis duobus punctis constituant. Porro in ratione *quæsita* terminus incognitus x scribatur a dextris: in *cognita* autem ratione is terminus scribatur a dextris, qui adnexam habet quæstionem, seu cui in ratione *quæsita* terminus incognitus x respondet. e. g. Proponatur problema sequens: 2 *urnæ vini venduntur* 3 *florenis*, *ergo* 6 *urnæ quot florenis veniunt?* Imprimis quæsitus florenorum nume-

merus dicatur x. Porro termini 3 & x sunt inter se homogenei: nam uterque florenos designat: itaque efformetur ex iis ratio, ita ut x a dextris sit; seu scribatur $3:x$. Reliqui duo termini 2 & 6 itidem sunt inter se homogenei, nam uterque urnas vini designat: est autem quæstio termino 6 adnexa; quæritur enim, 6 *urnæ vini quanti veniant*: itaque his ex terminis ita efformetur altera ratio, ut terminus 6 dextrum locum occupet, ac proinde scribatur $2:6$. Hoc pacto duæ rationes geometricæ obtinebuntur, scilicet ratio *quæsita* $3:x$, & altera *cognita* $2:6$.

2do. Si aliquis terminus in alterutra, vel utraque ratione fuerit compositus ex diversæ speciei valoribus, e.g. ex florenis & cruciferis; is terminus, nec non ejus homogeneus, vitandæ confusionis gratia reducatur ad valorem speciei infimæ. e.g. Proponatur problema sequens: *1 floreno + 24 cruciferis emuntur 2 libræ sachari, ergo 3 florenis quot libræ emi possunt?* In hoc problemate ratio florenorum est hæc, 1. *flor.* + 24 *crucif.* : 3 *flor.* hinc quoniam hujus rationis antecedens est compositus ex florenis, & cruciferis, uterque ejusdem rationis terminus reducatur ad cruciferos, scribaturque, crucif. $84:180$. Si autem hoc e.g. problema proponatur, *2 urnæ vini venduntur 3 florenis, 24 cruciferis, ergo 6 urnæ quot florenis emendæ erunt?* in ratione *quæsita* loco 3 *flor.* 24 *crucif.* scribantur 204 cruciferi, & litera x itidem numerum cruciferorum deinceps designare intelligatur.

3tio. Investigetur, num ratio *cognita* respectu *quæsitæ* sit directa, an inversa (191). Scilicet sedulo expendatur, num ea res, cujus duas diversas magnitudines exprimunt duo termini rationis *quæsitæ*, crescat, an decrescat *crescente* re illa, cujus duas diversas magnitudines exprimunt duo termini rationis *cognitæ*. Si hac re *crescente*, illa quoque *crescat*; ratio cognita respectu quæsitæ est *directa*: *inversa* autem, si una dictarum rerum *crescente*, altera *decrescat*.

e.g. In exemplo regulæ *1mæ* subnexo sic Tiro secum ipso: *Ratio* $3:x$ *est ratio florenorum pro vini urnis numerandorum*, & *ratio* $2:6$ *est ratio urnarum, pro quibus floreni illi sunt numerandi: jam vero quo* plures *urnæ*

urnæ emuntur, eo plures *floreni sunt pro iis numerandi*; *ergo ratio* $2:6$ *est* directa *respectu rationis quæsitæ* $3:x$. Item detur sequens e. g. problema : *certa pecuniæ summa pro diurna* 6 *operariorum mercede sufficit per dies* 4; *ergo eadem pecuniæ summa pro diurna* 12 *operariorum mercede per quot dies sufficiet?* Hoc in problemate per reg. 1*mam* duæ hæ rationes reperiuntur, $4:x$, & $6:12$; scilicet prior ratio est ipsa ratio *quæsita* dierum, altera est operariorum. Itaque sic porro secum ipso Tiro : *ratio* $4:x$ *est ratio dierum, quibus certa pecuniæ summa pro diurna operariorum mercede sufficit*, & *ratio* $6:12$ *est operariorum illorum, pro quorum diurna mercede, certa illa pecuniæ summa per aliquot dies sufficit: jam vero quo* major *est numerus operariorum, eo* paucioribus *diebus sufficit eadem pecuniæ summa pro diurna ipsorum mercede, adeoque* crescente *operariorum numero dictus dierum numerus* decrescit: *ergo ratio* $6:12$ *est* inversa *comparate ad quæsitam rationem* $4:x$.

4*to*. Si ratio *cognita* deprehendatur esse directa respectu *quæsitæ*; connectantur eæ rationes interjecto ipsis signo $=$; ut efficiant proportionem : at ratio quæsita a dextris scribenda est, ut terminus incognitus x semper sit quartus proportionis terminus. Sic in exemplo regulæ 1*mæ* subnexo, rationes $2:6$ & $3:x$ (quoniam prior est *directa* respectu posterioris) hoc modo scribantur, $2:6=3:x$. Sin autem ratio cognita respectu quæsitæ inversa fuerit ; eadem ratio cognita invertatur, ut ex ejus antecedente fiat consequens, & vicissim, ac tum primum cum ratione quæsita interjecto signo $=$ connectatur (201). Sic in exemplo regulæ 3*tiæ* subnexo vidimus, rationem cognitam $6:12$ esse inversam respectu quæsitæ $4:x$; itaque invertatur prius ratio illa cognita, ut sit $12:6$, ac tum primum connectatur cum ratione quæsita: hoc est, hæc efformetur proportio, $12:6=4:x$.

5*to*. His peractis reducatur (siquidem fieri possit) proportio ad terminos simpliciores. Nimirum dividatur imprimis uterque primæ rationis terminus per communem aliquem (si adfuerit) divisorem (172): deinde possunt etiam antecedentes proportionis per commu-

nem

nem (ſi habuerint) diviſorem dividi, quin mutetur proportio (174). Juvat hic recolere num. 46. *Schol.*

Sic in proportione $2:6=3:x$, quam pro exemplo regulæ *1mæ* ſubnexo in reg. *4ta* determinavimus, uterque primæ rationis terminus poteſt dividi per 2; quo facto ea proportio in hanc ſimpliciorem abit, $1:3=3:x$. Item proportio $12:6=4:x$ (quam in eadem reg. *4ta* pro exemplo regulæ *3tiæ* ſubnexo determinavimus) primam rationem per 6 dividendo abit in hanc, $2:1=4:x$; hæc autem, antecedentes per 2 porro dividendo, demum abit in hanc ſimpliciſſimam, $1:1=2:x$.

6to. Demum inveniatur valor incogniti termini x, multiplicando proportionis medios inter ſe, & factum dividendo per terminum primum (166). Sic in proportione $1:3=3:x$, eſt $x=9$; & in proportione $1:1=2:x$, eſt $x=2$.

EXEMPLA *alia Regulæ Aureæ ſimplicis.*

I. *Ex certa vini ſpecie* 24 *florenis emi poſſunt* 4 *urnæ; ergo* 60 *florenis quot urnæ poterunt emi?*

1) Per reg. *1mam*, rationes exprimantur hoc modo: *Flor.* $24:60$, *Urnæ* $4:x$. Regula *2da* hoc in exemplo non habet locum.

2) Per reg. *3tiam* inveſtigetur, num ratio florenorum ſit directa reſpectu rationis quæſitæ, an inverſa Scilicet Tiro hoc modo ratiocinetur: $4:x$ *eſt ratio urnarum vini emendarum, &* $24:60$ *eſt ratio florenorum, quibus urnæ vini emi debent*: *jam vero* creſcente *florenorum numerandorum numero* creſcit *etiam numerus urnarum emendarum; itaque ratio* $24:60$ *eſt* directa *reſpectu rationis quæſitæ* $4:x$. Hinc

4) Per reg. *4tam* hæc fiat proportio, $24:60=4:x$.

5) Tranſeatur ad reg. *5tam.* Nempe proportio nunc inventa, primam rationem per 12 dividendo, abit in hanc, $2:5=4:x$; hæc autem, antecedentes per 2 dividendo, demum abit in hanc, $1:5=2:x$.

6) Per reg. *6tam*, in ultima hac proportione multiplicando medios terminos inter ſe, & factum dividendo per primum, acquiritur $x=10$. Hoc eſt, ex dicto vini genere 60 florenis emi poſſunt urnæ 10.

II.

II. *Certa annonæ quantitas* 32 *militibus sufficit* 20 *diebus; ergo eadem annonæ quantitas* 24 *militibus quot diebus sufficiet?*

Scribatur per reg. 1*mam*, *Milit.* 32 : 24, & *Dies* 20 : x. Tum per reg. 3*tiam* sic Tiro secum ipso: 20 : x *est ratio dierum, per quos certa annonæ quantitas militibus alendis sufficit, &* 32 : 24 *est ratio militum, quibus alendis annona per aliquot dies sufficit: jam vero quo* major *est militum numerus, eo* paucioribus *diebus sufficit iis alendis eadem annonæ quantitas; itaque ratio* 32 : 24 *est* inversa *respectu quæsitæ rationis* 20 : x. *Hinc invertenda est prior illa ratio, hæcque formanda proportio,* 24 : 32 $=$ 20 : x.

Porro hæc proportio, si prior ejus ratio per 8 dividatur, abit in hanc, 3 : 4 $=$ 20 : x. Unde est $x = \frac{4 \times 20}{3}$ $= 26\frac{2}{3}$. Hoc est, dicta annonæ quantitas 24 militibus sufficeret per 26 dies, & præterea 27ma die quilibet miles acquireret $\frac{2}{3}$ partes portionis diurnæ.

III. *Ex sacharo* 2 *libræ emptæ sunt fl.* 1 + 24 *crucif. ergo* 8 *libræ quanti veniunt.*

Scribatur: *Libræ* 2 : 8; tum per reg. 2*dam fl* 1 + 24 crucif. reducatur ad cruciferos, scribaturque: *Crucif.* 84 : x. Jam quoniam *crescente* emendarum librarum numero *crescit* numerus cruciferorum pro iis numerandorum, ratio 2 : 8 est directa respectu rationis 84 : x; consequenter hæc obtinetur proportio, 2 : 8 $=$ 84 : x, seu (primam rationem per 2 dividendo) 1 : 4 $=$ 84 : x. Unde $x = 336$ crucif. $=$ fl. 5, crucif. 36.

207. PROBLEMA XLIV. *Resolvere problemata regulæ aureæ compositæ.*

Resolut. 1*mo.* Attente audita semel problematis propositione, problema illud hoc modo in chartam conjice: Proponatur e. g. sequens problema: *Militibus* 5 *libræ carnis* 100 *sufficiunt per dies* 20; *ergo* 15 *militibus quam-*

quamdiu sufficient carnis libræ 600? Primam problematis partem lente tibi dictatam sic exprime:

Milit.	5:
Carnis lib.	100:
Dies	20:

Tum alteram ejusdem problematis partem: *ergo* 15 *militibus* &c. exprime complendo inchoatas homogeneorum terminorum rationes, ut totalis expressio sit hæc demum

Milit.	5:	15
Carnis lib.	100:	600
Dies	20:	x.

2*do*. Quodsi cujuspiam rationis terminus alteruter, aut uterque compositus fuerit ex diversæ speciei valoribus, e.g. ex florenis, & cruciferis; fiat utriusque termini reductio ad valorem speciei infimæ, uti in reg. 2*da* num. præc. explicatum est. Regula hæc in assumpto exemplo non habet locum.

3*tio*. Singulæ rationes *cognitæ* (205) reducantur (siquidem fieri possit) ad simpliciorem expressionem, utrumque rationis terminum per idem dividendo. Sic in assumpto exemplo licet primam rationem per 5, secundam vero per 100 dividere: quo facto hæc acquiritur nova problematis expressio jam simplicior:

Milit.	1:	3
Carnis lib.	1:	6
Dies	20:	x.

4*to*. Singulæ rationes *cognitæ* conferantur successive cum ratione *quæsita*, ut innotescat, quænam earum sit directa respectu hujus, quæ item inversa (206. *Reg.* 3*tia*). Ratio *quæsita* erit æqualis rationi ex omnibus *cognitis* rationibus compositæ (200): at ita rationes illæ componendæ sunt, ut eæ, quæ sunt inversæ respectu rationis *quæsitæ*, prius inverti debeant (202). Itaque singulæ hujusmodi rationes inversæ prius invertantur; tum omnes omnino rationes *cognitæ* componantur in unam, earum antecedentes inter se, & consequentes itidem inter se multiplicando: denique ratio composita scribatur pro prima proportionis ratione, & ratio quæsita interjecto signo = pro altera.

e. g.

e. g. In assumpto superius exemplo sic Tiro procedat: 1) Ratio $20:x$ est dierum, per quos carnis libræ militibus sufficere debent; & ratio $1:3$ est militum, quibus carnis libræ per dies illos sufficere debent. Jam vero certus librarum numerus eo *paucioribus* diebus sufficit militibus, quo militum illorum numerus fuerit *major*: itaque ratio $1:3$ est inversa respectu rationis quæsitæ $20:x$; consequenter (rationem $1:3$ invertendo) est ceteris paribus, $3:1 = 20:x$ (201).

2) Ratio $20:x$ est ratio dierum, per quos libræ carnis sufficere debent militibus, & ratio $1:6$ est ratio librarum carnis, quæ sufficere debent. Jam vero quo *plures* fuerint libræ carnis, illæ eo *pluribus* diebus sufficiunt iisdem militibus; adeoque ratio $1:6$ est directa respectu quæsitæ, seu est ceteris paribus $1:6 = 20:x$.

Hinc ratio quæsita $20:x$ est reapse æqualis rationi, ex rationibus $3:1$ & $1:6$ compositæ (198). Quapropter rationes illæ hoc modo scribantur:

$$\left.\begin{matrix} 3:1 \\ 1:6 \end{matrix}\right\} = 20:x;$$

tum rationes cognitas componendo hæc fiat proportio, $3:6 = 20:x$.

5*to*. Ultima proportio reducatur (si fieri possit) ad simpliciorem expressionem, methodo, quam in 5*ta* praeced. probl. regula exposuimus; tum inveniatur incognita x, medios proportionis multiplicando inter se, & factum dividendo per terminum primum. Sic in assumpto exemplo ultima proportio $3:6 = 20:x$ (priorem rationem per 3 dividendo) abit in hanc, $1:2 = 20:x$. Unde facillime jam innotescit, esse $x := 40$. Hoc est, si 5 militibus libræ carnis 100 sufficiunt per dies 20; 15 militibus carnis libræ 600 sufficient per dies 40.

Schol. 1. Quodsi eveniat, ut rationes componendæ, etiam postquam ad simplicissimos terminos reductæ fuerint, satis magnos adhuc terminos habeant; in earum compositione *indicetur* duntaxat multiplicatio terminorum: tum, si qui communes factores deprehendantur in utroque rationis compositæ termino, aut in antecedentibus rationum, deleantur. Hac deletione obtinebitur compendiosa proportionis ad simpliciorem expressionem reductio.

e. g.

e. g. Si in quopiam exemplo hæ acquirantur per reg. 4tam rationes componendæ:

$$\left.\begin{array}{l} 9:\ 8 \\ 8:\ 9 \\ 2:\ 3 \end{array}\right\} = 4:\ x;$$

nonnisi hoc modo scribatur proportio, $9 \times 8 \times 2 : 8 \times 9 \times 3 = 4 : x$. Tum in prima ratione communes utrique termino factores 9 & 8 deleantur: hoc pacto ratio illa reapse imprimis per 9, deinde vero per 8 dividetur, abibitque in hanc, $2:3 = 4:x$. Hæc vero (antecedentes per 2 dividendo) convertatur in hanc, $1:3 = 2:x$; ex qua nullo jam negotio innotescit esse $x = 6$.

Schol. 2. Arithmetici regulam auream tam simplicem, quam compositam dividere solent in *directam*, & *inversam*, seorsimque solent tradere regulas tam pro directâ, quam pro inversa. Vocant autem *directam*, in qua nulla reperitur ratio, quæ sit inversa respectu rationis quæsitæ; *inversam* autem, si aliqua ratio reperiatur in problemate, quæ sit inversa respectu rationis quæsitæ. At nos regulas pro qualibet aurea regula simplici n. 206, & pro qualibet composita n. 207 tradidimus, quin regulam auream in directam, & inversam diserte dispescceremus.

EXEMPLA *Regulæ Aureæ compositæ.*

I. *Floreni* 1500 *per annos* 6 *dant censum fl.* 450; *ergo floreni* 800 *per* 4 *annos quantum dabunt?*

1) Per reg. 1*mam*, exprimatur problema hoc modo:

Flor. censum dantes	1500:	800
Anni	6:	4
Census	450:	x.

2) Per reg. 3*tiam* reducantur rationes cognitæ ad simpliciores expressiones, primam per 100, alteram per 2 dividendo, scribaturque:

Flor. censum dantes	15:	8
Anni	3:	2
Census	450:	x.

3) Per reg. 4*tam*, singulæ rationes cognitæ conferantur cum ratione quæsita, ut innotescat, quænam earum

rum sit directa respectu hujus, quæ item inversa. Facile patet, utramque esse directam: quare scribatur:

$$\left.\begin{matrix} 15: & 8 \\ 3: & 2 \end{matrix}\right\} = 450 : x.$$

Tum compositis rationibus (usurpando methodum in *Schol.* 1.. propositam) fiat hæc proportio, $15 \times 3 : 8 \times 2 = 450 : x$.

4) Per reg. 4*tam*, ultima hæc proportio reducatur ad simpliciorem expressionem. Nempe antecedentes primum per 15 dividendo, est $3 : 8 \times 2 = 30 : x$; eosdem antecedentes porro per 3 dividendo, est $1 : 8 \times 2 = 10 : x$, seu est $1 : 16 = 10 : x$. Est itaque $x = 160$.

II. *Murarii 24 qualibet die 12 horis laborando, murum 36 hexapedarum erigere possunt intra 16 dies: ergo 60 murarii quotidie 8 horis laborando murum 30 hexapedarum intra quot dies poterunt erigere?*

1) Per reg. 1*mam* exprimatur problema hoc modo:

Murarii	24:	60
Horæ	12:	8
Hexap.	36:	30
Dies	16:	*x*.

2) Per reg. 3*tiam* reducantur rationes ad expressiones simpliciores, primam rationem dividendo per 12, 2dam per 4, 3tiam per 6, scribaturque:

Murarii	2:	5
Horæ	3:	2
Hexap.	6:	5
Dies	16:	*x*.

3) Per reg. 4*tam* examinentur rationes. Ac prima quidem ratio cognita respectu quæsitæ inversa est; quo enim *plures* sunt murarii, eo *paucioribus* egent diebus, si cetera sint paria, ad eundem murum erigendum: itaque prima ratio cognita invertatur, ut sit 5:2. Altera cognita ratio est itidem inversa respectu quæsitæ; quo enim *pluribus* quotidie horis laborant murarii, eo *paucioribus* egent diebus ad eundem murum erigendum: consequenter altera quoque ratio cognita invertenda est, ut sit 2:3. Tertia cognita ratio est directa respectu rationis quæsitæ: quo enim *plurium* hexapedarum murus erigendus est, eo *pluribus* diebus opus est, si

si cetera sint paria: tertia ergo ratio cognita invertenda non est. Hinc scribatur:

$$\left.\begin{array}{l}5:\ 2\\2:\ 3\\6:\ 5\end{array}\right\} = 16:x;$$

tum compositis rationibus stat hæc proportio, $5\times2\times6:2\times3\times5 = 16:x$.

4) Per reg. 5*tam* reducatur hæc proportio ad expressionem simpliciorem. Nempe in prima ratione factores 5 & 2, utrique termino communes deleantur: hoc facto erit $6:3 = 16:x$. Porro prima hujus proportionis ratio dividatur per 3; erit demum $2:1 = 16:x$. Unde $x = 8$.

III. *Olim 4 Studiosi per 4 menses ali poterant florenis 60; ergo nunc, si ponamus annonæ pretium* $\frac{1}{4}$ *sui parte auctum esse, quot Studiosi poterunt ali 200 florenis per 10 menses?*

1) Exprimatur problema hoc modo:

Studiosi	4:	x
Menses	4:	10
Floreni	60:	200
Pretium annonæ	1:	$1 + \frac{1}{4}$.

Porro ratio pretii annonæ reducatur tota ad fractionem, ejusdem cum adjuncta fractione denominationis, seu scribatur; *Pret. annonæ* $\frac{4}{4} : \frac{5}{4}$.

2) Reducantur rationes ad simpliciores expressiones, rationem mensium per 2, florenorum per 20 dividendo, rationem autem pretii annonæ multiplicando per 4. Adeoque scribatur:

Studiosi	4:	x
Menses	2:	5
Floreni	3:	10
Pret. annonæ	4:	5.

3) Ratio mensium, uti & pretii annonæ, inversa est respectu rationis *quæsitæ*. Nam eo *pauciores* studiosi possunt ali certa summa florenorum, quo *pluribus* mensibus alendi sunt, item quo *majus* est annonæ pretium.

 At

At rationem florenorum esse directam, clarum est. Itaque inversis mensium, & pretii annonæ rationibus scribatur:

$$\left.\begin{array}{l} 5:\ \ 2 \\ 3:\ 10 \\ 5:\ \ 4 \end{array}\right\} = 4:x.$$

Unde hæc acquiritur proportio composita, $5 \times 3 \times 5 : 2 \times 10 \times 4 = 4 : x$.

4) Ultima hæc proportio, si prima ratio per 5 dividatur (sufficit autem in primo termino delere unum factorem 5, & in altero factorem 10 per 5 dividere) abit in hanc, $3 \times 5 : 2 \times 2 \times 4 = 4 : x$, seu $15 : 16 = 4 : x$. Unde $x = 4 : \frac{4}{15}$. Hoc est, 200 florenis in assumpta hypothesi possent per 10 menses ali 4 Studiosi, & præterea pro quinto Studioso remanerent $\frac{4}{15}$ partes ejus pretii, quod pro suo 10 mensium victu pendere deberet.

Schol. 3. Exempla hæc fusius pertractare libuit, quo melius imbibant Tirones hanc nostram methodum, sibi per totum vitæ decursum non parvo usui futuram. Nunc jam alia quoque exempla subjicere lubet, in quibus iidem proprio marte resolvendis se se exercere queant.

I. *Si vasa singula coempti vini venderem* 16 *florenis, lucrarer in* 60 *vasis florenos* 360; *quantum ergo lucrarer in* 80 *vasis, si singula venderem* 20 *florenis?* Erit $x =$ 600 florenis.

II. *Messores* 16 *demetunt* 50 *jugera intra dies* 10; *ergo* 4 *messores jugera* 15 *quot diebus demetent?* Est $x = 12$ diebus.

III. *Sartores* 5, *singulis diebus laborando* 8 *horis intra* 16 *dies præparant* 60 *tunicas; ergo unus sartor singulis diebus laborando* 16 *horis, tunicas* 30 *intra quot dies præpararet?* Est $x = 20$ diebus.

Schol. 4. *Examen* rite peractæ operationis, sive regulæ aureæ *simplicis*, sive *compositæ*, hoc modo institui potest. Immutetur tantisper problema ita, ut incognitæ x suus valor per operationem inventus substituatur, & alter cujuscunque rationis cognitæ terminus pro in-

incognito habeatur, denomineturque x. Si nova operatione instituta inveniatur x esse æquale ei numero, loco cujus idem x interim substitutum erat; id erit indicium rite peractæ operationis. e. g. In problemate, quod in regula *1ma* proposuimus, loco x substituamus ejus valorem $= 40$, & in ratione militum numerum 15 ponamus esse incognitum, vocemusque x; consequenter problema illud hoc modo immutemus: *Militibus 5 libræ carnis 100 sufficiunt per dies 20; ergo 600 libræ carnis quot militibus sufficient per 40 dies?* Si operatione juxta regulas præscriptas instituta prodiverit esse $x = 15$; id erit indicio, in operatione priori errorem non fuisse commissum.

208. Arithmetices Scriptores, dum de regula aurea agunt, solent speciatim tradere etiam *Regulam Societatis*, ita dictam propterea, quod tunc potissimum adhiberi soleat, quando plures in commune negotium symbolas suas conferunt, ut dein commune lucrum vel damnum pro ratione symbolarum a se collatarum inter se partiantur. Consistit autem Regula societatis non alia in re, quam in applicatione regulæ aureæ toties repetita, quot sunt homines, inter quos partitio est facienda. Scilicet sicuti se habet summa omnium symbolarum ad quamcunque particularem symbolam a, ita se habet totum lucrum vel damnum ad illam lucri, vel damni partem, quæ symbolæ a respondet. Sed res exemplo optime illustratur. Itaque

Sit sequens problema propositum: *Tres mercatores lucri gratia contulerunt certam pecuniæ summam. Primus contulit 600 florenos, secundus fl. 400, tertius fl. 200. Sunt autem universe lucrati flor. 300. Quæritur, quantum unicuique obveniat ex lucro?*

1) Sit primi lucrum $= x$, secundi $= y$, tertii $= z$; tum pro primo hæc instituatur proportio: sicut se habet symbolarum summa, seu 1200 flor. ad primi mercatoris symbolam, seu ad fl. 600, ita se habet totum lucrum, seu flor. 300 ad ejusdem primi lucrum x. Id est, hæc instituatur proportio, $1200 : 600 = 300 : x$. Quæ (si prima ratio per 600 dividatur) abit in hanc, $2 : 1 = 300 : x$. Unde $x = 150$ fl.

 2)

2) Pro fecundo mercatore hæc ftat proportio, 1200: 400 $=$ 300 : y; feu 3 : 1 $=$ 300 : y. Unde $y = 100$.

3) Pro tertio eft, 1200: 200 $=$ 300 : z; feu 6 : 1 $=$ 300 : z. Unde $z = 50$.

Hoc eft, *primi* lucrum eft $=$ 150 fl. *fecundi* $=$ 100 fl. *tertii* $=$ 50 fl. Quæ partialia lucra, fi in uuam fummam cogantur, reftituunt lucrum totale $=$ 300 flor. Quod ipfum eft indicium quoddam rite peractæ operationis.

209. Sæpe fit, ut non fola quantitas collatarum fymbolarum, fed alia etiam adjuncta attendi debeant, e. g. tempora, quibus fingulæ fymbolæ lucrum fecerunt. Quo cafu Regulam focietatis vocare poffumus *compofitam*. Eadem autem eft operandi ratio, quæ in regula *fimplici*, quam num. præc. expofuimus: hoc uno notato, quod pro fymbola quavis particulari fumi debeat quantitas fymbolæ, multiplicata per id genus *adjunctum* fibi refpondens, e. g. per tempus, quo lucrum fecit, aut damnum intulit.

e. g. Sit problema fequens propofitum. *Tres mercatores contulerunt fucceffive certam pecuniæ fummam. Primus contulit fl.* 300, *fecundus fl.* 100, *exercueruntque hac fumma mercimonium per* 4 *annos. Tertius contulit fl.* 600; *at nonnifi unico anno poftremo fumma hæc cum priori lucrum fecit. Lucrum totale eft* $=$ 220 *flor. Quæritur lucrum fingulis obveniens.*

1) Primi lucrum fit $= x$, fecundi $= y$, tertii $= z$. Primus per annos 4 conferendo fl. 300, tantundem fecit, ac fi per unum annum contuliffet floren. 300×4; adeoque primi fymbola æquivalet 1200 florenis. Secundi fymbola æquivalet 400 florenis. Tertius per unum annum contulit fl. 600. Hinc fumma fymbolarum æquivalet fl. $1200 + 400 + 600$, feu florenis 2200.

2) Itaque pro primo mercatore hæc fiat proportio, 2200: 1200 $=$ 220 : x. Quæ (fi prima ratio per 100 dividatur, deinde vero antecedentes per 22) abit in hanc, 1 : 12 $=$ 10 : x. Unde eft $x = 120$.

3) Pro fecundo ftat, 2200 : 400 $=$ 220 : y, feu 1 : 4 $=$ 10 : y. Unde $y = 40$. Pro tertio denique eft, 2200 : 600 $=$ 220 : z, feu 1 : 6 $=$ 10 : z. Hinc $z = 60$.

Hoc eft, primi lucrum eft $=$ 120 flor. fecundi $=$

40

40 fl. tertii $=$ 60 fl. Quæ partialia lucra in unam summam collecta, sunt $=$ 220 fl.

EXEMPLA *Regulæ Societatis.*

I. Regulæ *simplicis.* Tres simul elocarunt ad censum fl. 4000. Primus dedit fl. 1200. alter 1800, tertius fl. 1000. Ex hac summa periverunt 1800 floreni. Quæritur quantum quisque damni sit passus?

Fiat imprimis pro primo hæc proportio: sicut se habet tota summa fl. 4000 ad fl. 1200, ita se habet totale damnum fl. 1800 ad primi damnum x. Erit adeo $x =$ 540 fl. Simili modo invenietur secundi damnum, seu y esse $=$ 810 fl. tertii damnum seu $z = 450$.

II. Regulæ *compositæ.* Tribus lanionibus elocantur quædam pascua fl. 60. Primus 100 boves aluit iis pascuis per 2 menses; secundus 50 boves per 4 menses; tertius 400 boves uno mense. Quæritur, quantum quisque lanio solvere debeat? Est $x = 15$; $y = 15$, $z = 30$.

210. His quæpiam de Regula falsi adjicere lubet. *Regula falsi,* seu *falsæ positionis* tunc exercetur, quum terminis incognitis substituuntur interim termini ad arbitrium assumpti, sed tamen tales, qui sint incognitis proportionales, ut deinde ope eorum, adhibita regula aurea, ipsi incogniti detegantur.

e. g. Proponatur sequens problema: *Tres mercatores, Sempronius, Cajus, & Titius certam pecuniæ summam lucri faciendi gratia contulerunt. Cajus duplo plus contulit, quam Sempronius: Titius autem tantundem contulit, quantum Sempronius & Cajus simul. Lucrum integrum est = 90 flor. Quæritur, quantum unicuique hoc ex lucro obtingat?*

Quoniam non datur quantitas a singulis mercatoribus collata, sed solum ratio quantitatum collatarum; substituantur interim ad arbitrium quantitates, quæ easdem ad se invicem rationes habeant, quæ in problemate dantur. e.g. Si quantitas a Sempronio collata ponatur esse $= 1$; quantitas Caji erit $= 2$, & Titii $= 3$. Hinc summa quantitatum erit $= 6$. Unde si lucrum Sempronio obveniens dicatur x, hæc stabit proportio, $6 : 90 = 1 : x$. Unde $x = 15$. Pro Cajo hæc stat proportio, 6:

 90 $=$

$90 = 2 : y$; adeoque $y = 30$. Denique pro Titio est 6: $90 = 3 : z$, ac proinde $z = 45$.

CAPUT QUINTUM.

De Progressionibus, & Seriebus.

211. *Progressio* est series quantitatum continue proportionalium: seu est series ejusmodi quantitatum, quarum prima est ad secundam, ut secunda ad tertiam; secunda ad tertiam, ut tertia ad quartam; tertia ad quartam, ut quarta ad quintam, & sic porro (155). Si quantitates fuerint continue arithmetice proportionales; progressio est *arithmetica*: *geometrica* vero, si quantitates fuerint geometrice proportionales.

212. Coroll. Itaque in progressione arithmetica terminus primus sic differt a secundo, ut secundus a tertio; secundus a tertio, ut tertius a quarto: in geometrica vero sic se habet primus ad secundum, ut secundus ad tertium; secundus ad tertium, ut tertius ad quartum, & sic porro. Sic numeri naturales 1, 2, 3, 4 &c. constituunt progressionem arithmeticam: at numeri 1, 2, 4, 8 &c. sunt in progressione geometrica.

213. Progressio tam arithmetica, quam geometrica, alia est *crescens*, alia *decrescens*. *Crescens* est, in qua terminus primus est minimus, secundus major, tertius adhuc major, & sic porro. Ea vero, in qua terminus primus est maximus, secundus minor, tertius adhuc minor, & sic porro; est progressio *decrescens*. Sic 1, 2, 4 &c. est progressio geometrica *crescens*; at 8, 4, 2, 1 est *decrescens*.

214. PROBLEMA XLV. *Construere formulam generalem, quæ repræsentet omnem progressionem arithmeticam.*

Resolut. Cujusvis progressionis arithmeticæ terminus primus potest appellari a, differentia d. Quibus positis, in progressione crescente secundus terminus erit $a + d$, & tertius (utpote constans ex secundo addita

dita differentia) erit $a + 2d$, quartus $a + 3d$ & ſic porro: in decreſcente contra erit ſecundus terminus $a - d$, tertius $a - 2d$, quartus $a - 3d$, & ſic porro (212). Ergo generatim quævis progreſſio arithmetica bene repræſentatur hac formula, $a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d, a \pm 4d$ &c.

215. THEOREMA XXXIII. *Summa totius progreſſionis arithmeticæ æquatur ſemiſummæ terminorum primi, & ultimi ſimul ſumptorum, multiplicatæ per numerum omnium terminorum.*

Demonstr. Aſſumamus e. g. progreſſionem creſcentem quatuor terminorum. Ea progreſſio rite repræſentabitur hac formula, $a, a + d, a + 2d, a + 3d$ (214). Jam hujus progreſſionis ſumma eſt $= 4a + 6d$; quam æqualem eſſe ſemiſummæ extremorum multiplicatæ per numerum terminorum ſic oſtendo. Summa extremorum eſt $= 2a + 3d$, adeoque ſemiſumma $= a + \frac{3d}{2}$, quæ ſi per terminorum numerum $= 4$ multiplicetur, fit $= 4a + \frac{12d}{2}$, ſeu $= 4a + 6d$. Itaque veritas theorematis in aſſumpto exemplo evidenter patet. Quæ demonſtrandi ratio cum alteri cuilibet proportionis arithmeticæ ſive creſcentis, ſive decreſcentis exemplo æque applicari poſſit, ejusdem theorematis veritatem generatim etiam evincit.

216. PROBLEMA XLVI. *Conſtruere formulam generalem, quæ repræſentet omnem progreſſionem geometricam.*

Resolut. Cujusvis geometricæ progreſſionis terminus primus poteſt appellari a, communis exponens m. Quibus poſitis, eſt ſecundus terminus am (150). Tertius eſt am^2; ſi enim tertius terminus dicatur x, erit in progreſſione geometrica, $a : am = am : x$ (212); unde $x = \frac{a^2 m^2}{a} = am^2$. Si quartus dicatur y; quoniam

niam est secundus ad tertium, ut tertius ad quartum, stat $am : am^2 = am^2 : y$. Unde $y = am^3$. Eodem modo deprehenditur quintus esse am^4, sextus am^5, & sic porro. Hinc omnem universe progressionem geometricam repræsentabit hæc formula, a, am, am^2, am^3, am^4 &c.

217. THEOREMA XXXIV. *In progressione geometrica, quiscunque prior terminus sic se habet ad quemcunque posteriorem, ut primus ad secundum, si horum uterque ad eam potentiam elevetur, quam indicat duorum illorum distantia mutua.* e. g. Quatuor hi termini, L, T, D, B sint continue proportionales, seu constituant progressionem geometricam, quæraturque quomodo se habeat T ad B. Quoniam distantia inter T & B intercepta duobus (quot nempe *commata* continet) intervallis constat; primi duo termini L & T eleventur ad secundas potentias: erit $T : B = L^2 : T^2$.

Demonstr. Nam e. g. in progressione L, T, D, B, potest terminus primus L vocari a, & exponens communis m; quo posito erit $T = am$, $D = am^2$, $B = am^3$ (216). Hinc erit $L^2 = a^2$, & $T^2 = a^2 m^2$ (74). Quodsi ergo stat $am : am^3 = a^2 : a^2 m^2$, stabit etiam $T : B = L^2 : T^2$. Jam vero priorem illam proportionem stare clarum est; quippe in ea factum mediorum est æquale facto extremorum: ergo altera quoque stet, est necesse. Quæ demonstrandi ratio cum alteri cuicunque particulari casui æque applicari possit, theorematis veritatem generatim evincit.

218. THEOREMA XXXV. *Summa totius progressionis geometricæ est æqualis fractioni, cujus numerator sit* factum *termini ultimi in communem exponentem ducti, termino primo mulctatum, denominator autem sit ipse communis exponens unitate mulctatus.* Hoc est, si summa vocetur s, terminus primus a, ultimus ω, communis exponens m; est $s = \dfrac{\omega m - a}{m - 1}$.

Demonstr. Cum in progressione quivis terminus sit antecedens excepto ultimo, erit summa omnium ante-

antecedentium $= s - \omega$; & cum quivis terminus sit consequens excepto primo, erit summa omnium consequentium $= s - a$. Jam vero si dentur plures rationes communi exponente gaudentes; summa omnium antecedentium est ad summam omnium consequentium, ut quivis antecedens ad suum consequentem (182). Est ergo in progressione geometrica:

$$s - \omega : s - a = a : am.$$

Multipl. med. & extr. $sam - \omega am = sa - a^2$.

Divid. totum per a: $sm - \omega m = s - a$.

Transpon. s & $-\omega m$, est: $sm - s = \omega m - a$.

Divid. per $m - 1$, $s = \dfrac{\omega m - a}{m - 1}$ Q.E.D.

Schol. Lubeat theorematis veritatem in numeris intueri. Assumamus progressionem, 1, 2, 4, 8, cujus exponens est $= 2$. Ultimus terminus per exponentem multiplicatus, est $= 16$. Itaque juxta theorema deberet esse in hac progressione $s = \dfrac{16 - 1}{2 - 1} = 15$. Et omnino ita se res habet: est enim $1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

219. *Series* est ordo quantitatum certa aliqua, & constanti lege se se excipientium. e. g. Progressiones arithmeticæ, & geometricæ sunt *series*: nam earum termini constanti lege sese excipiunt (211). Series, in qua numerus terminorum est finitus, dicitur *finita*; *infinita* autem, si numerus ille sit infinitus, seu omni, qui cogitari possit, major.

220. Coroll. Igitur in serie infinita, cujus termini continenter crescunt, ultimus terminus infinite magnus sit, oportet; in ejusmodi vero serie infinita, cujus termini continenter decrescunt, nonnisi infinite parvus, seu omni, qui cogitari queat, minor esse potest.

Schol. 1. Quoniam signum quantitatis infinitæ est ∞ (11), quantitas infinite parva, seu omni, quæ cogitari possit,

poſſit, minor rite exprimitur per $\frac{1}{\infty}$. Cum enim valor fractionis, manente eodem numeratore, eo magis decreſcat, quo magis creſcit ejuſdem denominator (32); ſi denominator fuerit infinite magnus, ſeu $= \infty$, ex adverſo valor fractionis infinite parvus ſit, oportet.

Schol. 2. Quantitas infinite parva reſpectu quantitatis finitæ evaneſcit, ita ut pro nihilo haberi poſſit. e. g. Si quantitati finitæ a adjuncta ſit alia infinite parva, ſeu $\frac{1}{\infty}$; hæc in ejus conſortio pro nihilo haberi poteſt, ita ut poni queat $a + \frac{1}{\infty} = a$. Si enim non eſſet $a + \frac{1}{\infty} = a$; differentia harum quantitatum, quæ eſt $= \frac{1}{\infty}$, eſſet quantitas determinatæ magnitudinis: quandocunque enim duæ quæpiam quantitates ſunt reapſe inæquales, earum differentia *determinata* ſit, oportet: atqui $\frac{1}{\infty}$ non poteſt eſſe quantitas determinata; ſecus enim non eſſet infinite parva, ſeu omni, quæ cogitari poſſit, minor: ergo.

221. PROBLEMA XLVII. *Invenire ſummam fractionum numero infinitarum, quarum numerator eſt conſtans, denominatores autem creſcunt in progreſſione geometrica.*

Resolutio. Si primus denominator appelletur b, & exponens progreſſionis geometricæ denominatorum dicatur m; eam progreſſionem bene repræſentabit hæc formula, $b, bm, bm^2, bm^3 \text{ - - } bm^{\infty}$ (216). Hinc ſi præterea communis numerator vocetur d; quævis ejuſmodi fractionum ſeries repræſentari poteſt hac formula,

$\frac{d}{b}, \frac{d}{bm}, \frac{d}{bm^2}, \frac{d}{bm^3}, - - \frac{d}{bm^{\infty}}.$ Jam cum in his fractionibus manente eodem numeratore denominatores crescant in progressione geometrica; fractiones decrescunt in progressione geometrica (32). Hinc ultimus terminus $\frac{d}{bm^{\infty}}$, est fractio valoris infinite parvi (220). Invertamus eam progressionem hoc modo: $\frac{d}{bm^{\infty}}, - - - \frac{d}{bm^3}, \frac{d}{bm^2}, \frac{d}{bm}, \frac{d}{b};$ hoc pacto prior illa progressio decrescens abit in crescentem, cujus primus terminus sit $\frac{d}{bm^{\infty}}$, ultimus $\frac{d}{b}$. Cum ergo in hujusmodi progressione sit summa, seu $s = \frac{\omega m - a}{m - 1}$ (218); si loco ω substituamus $\frac{d}{b}$, & primum terminum a, seu $\frac{d}{bm^{\infty}}$, utpote infinite parvum negligamus (220. Schol. 2), erit $s = \left(\frac{dm}{b}\right) : (m-1) = \frac{dm}{b(m-1)}$ (218).

222. Coroll. Igitur summa hujus progressionis infinitæ, $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, - - - \frac{1}{\infty}$ est $= 2$. In hac enim est $d = 1$, $b = 1$, $m = 2$; adeoque est $\frac{dm}{b(m-1)} = \frac{1 \times 2}{1(2-1)} = \frac{2}{1} = 2$. Et sane si duos primos ejus pro-

progressionis terminos $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}$ assumamus; horum summa est $= 2 - \frac{1}{2}$: si tres assumamus eorum summa erit $= 2 - \frac{1}{4}$, quatuor terminorum summa est $= 2 - \frac{1}{8}$, & sic porro semper ita, ut summæ a numero 2 defectus sit æqualis termino ex assumptis ultimo. Hinc si seriem infinitam accipiamus, cujus ultimus terminus sit $\frac{1}{\infty}$; summa omnium terminorum erit $= 2 - \frac{1}{\infty}$, seu erit summa illa $= 2$ (220. *Schol.* 2.).

CAPUT SEXTUM.

De Fractionibus Decimalibus.

223. Fractio, quæ peculiari nomine *decimalis* dicitur, pro denominatore semper habet unitatem cum aliquot zeris. e. g. $\frac{246}{1000}$ est fractio decimalis, significatque *ducentas quadraginta sex millesimas.*

Schol. In denominatore fractionis decimalis quandam progressionem geometricam contineri patebit in sequentibus: unde etiam ejus pertractationem hunc in locum rejici posse existimavimus; præsertim cum primum fractionis decimalis usum in Logarithmis sequ. Cap. pertractandis habituri simus.

224. Mathematici in exprimendis fractionibus decimalibus compendio uti solent, quod his capitibus continetur. 1*mo.* Omisso denominatore solum numeratorem scribunt, eumque ab integris interjecto *commate*, vel

vel puncto separant. Subintelligunt autem, denominatorem semper constare unitate post se totidem zeros adjunctos habente, quod notas numerator continet. e. g. $4\frac{246}{1000}$ hoc modo scribunt: 4, 246; id quod significat 4 integra, 246 millesimas. Hinc e. g. 2, 1 significat duo integra, & unam partem decimam: cum enim numerator unica duntaxat nota constet, etiam in denominatore nonnisi unicus zerus intelligendus est unitati adjunctus. At 2, 12 significat duo integra, & 12 centesimas.

2do. Fractionem decimalem omisso denominatore scriptam inde dignosci, quod commate secernatur ab integro numero sibi præfixo, clarum est. Si enim loco 2, 12 omisso commate scriberes 212; hic numerus mera integra, & nullam fractionem designaret. Hinc si detur quæpiam fractio decimalis absque omni integro; ea ita scribi solet, ut locum integri numeri zerus occupet, a fractione commate separatus. Sic 246 millesimæ absque omni integro datæ hoc modo scribuntur: 0, 246. Hinc e. g. 0, 34 significat 34 centesimas absque omni integro.

3tio. Si fractionis decimalis cum suo denominatore scriptæ numerator pauciores habeat notas, quam sint in denominatore zeri; id genus fractio nequit omisso denominatore scribi, nisi in numeratore numerus notarum præfixis zeris expleatur ita, ut totidem sint notæ in numeratore, quot in denominatore zeri. Sic si detur fractio $\frac{12}{1000}$, designans 12 millesimas; ea nequit omisso denominatore, hoc modo scribi: 0, 12. Hæc enim expressio (per reg. *1mam*) significaret 12 centesimas. Verum numeratori 12 præfigendus est zerus, seu fractio illa decimalis hoc modo est exprimenda: 0,012. Hoc enim pacto jam innotescit, in denominatore post unitatem tres zeros adesse, cum numerator tribus notis constet, ac proinde innotescit, 12 illas partes, quas nume-

numerator continet, esse millesimas. Pariter $\frac{1}{1000}$, omisso denominatore sic scribitur: 0, 001; $3\frac{4}{100}$ hoc modo, 3, 04. &c.

225. THEOREMA XXXVI. *Cuivis fractioni decimali adjungi possunt a dextris zeri quotcunque, quin ejus valor mutetur.* e. g. Loco 2, 12 scribi potest 2, 120, vel 2, 1200 &c.

Demonstr. Cum enim denominator semper totidem zeros post unitatem habere intelligatur, quot notis numerator constat (224. reg. 1.); si numeratori quotcunque zeri adjiciantur a dextris, denominatori quoque semper totidem zeri adjici concipiuntur: consequenter numeratori quotcunque zeros a dextris addere non aliud reapse est, quam & numeratorem, & denominatorem per idem multiplicare, scilicet per 10, vel per 100, vel per 1000 &c. Eo ipso autem id genus adjectione valor fractionis non mutatur (39).

226. THEOREMA XXXVII. *In fractionibus decimalibus prima post comma nota denotat partes decimas, secunda centesimas, tertia millesimas, & sic porro.* e. g. 3, 456 denotat 3 integra, 4 decimas, 5 centesimas, 6 millesimas.

Demonstr. Assumamus e. g. fractionem 0, 435. Hæc fractio æquivalet huic, $\frac{435}{1000}$ (224), ac proinde æquivalet his fractionibus: $\frac{400}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{5}{1000}$; harum enim summa est $= \frac{435}{1000}$. Jam vero si harum fractionum duas priores ad simpliciores expressiones reducamus, eæ abeunt in has, $\frac{4}{10}$, $\frac{3}{100}$: ergo prima nota

4, re-

4, reapſe partes decimas; ſecunda 3, partes centeſimas ſignificat: tertiam notam 5 eſſe partium milleſimarum clarum eſt. Quæ demonſtratio cuicunque alteri fractioni decimali æque applicari poteſt, ac proinde theorematis veritatem generatim evincit.

227. COROLL. Cum prima fractionis decimalis nota ſignificet partes decimas, ſecunda centeſimas, tertia milleſimas, & ſic porro; patet imprimis earum notarum ſeorſim conſideratarum denominatores eſſe in progreſſione geometrica: patet deinde, earundem notarum valorem a fine regrediendo continenter creſcere in decuplum, ut fit in numeris integris.

228. PROBLEMA XLVIII. *Datam fractionem non decimalem convertere in decimalem manente priori valore.*

RESOLUT. Numeratori datæ fractionis adjiciatur zerus, tum dividatur per denominatorem: rurſus reſiduo, ſi quod manet, adjungatur zerus, ac iterum per denominatorem dividatur, & ſic porro. e. g. Sit $\frac{1}{8}$ reducenda ad fractionem decimalem. Numeratori 1 addatur zerus, tum 10 dividantur per 8: quotus erit = 1, pro prima fractionis decimalis nota ſcribendus, manebitque reſiduum = 2. Huic reſiduo addatur zerus, & 20 rurſus per 8 dividantur: quotus erit = 2, pro ſecunda fractionis decimalis nota ſcribendus, manebitque reſiduum = 4. Huic reſiduo addatur iterum zerus, & 40 dividantur per 8: quotus erit = 5, pro tertia fractionis decimalis nota ſcribendus. Et quoniam peracta hac tertia diviſione nullum amplius manet reſiduum, tota operatio peracta jam eſt, inventaque fractio decimalis 0, 125. Quam quidem eſſe $= \frac{1}{8}$ facile patet. Nam eſt $0,125 = \frac{125}{1000}$ (224); eſſe autem

125

$\frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$ videbis, si fractiones has ad communem denominatorem reduxeris (44).

Schol. Quodsi continenter aliqua fractio remaneat, porro reducenda; id erit indicio, datam fractionem non posse exacte converti in fractionem decimalem: quo tamen diutius continuata fuerit operatio, eo magis accedet inventa fractio decimalis ad verum fractionis datae valorem. e. g. $\frac{2}{3} = 0,6666$ &c.

229. PROBLEMA XLIX. *Fractiones decimales addere.*

Resolut. Cum fractionum decimalium notae a dextra sinistram versus more integrorum progrediantur (227); additio fractionum decimalium eodem prorsus modo fit, quo numerorum integrorum. Scilicet subscribantur integra integris, decimae decimis, centesimae centesimis, & cetera more consueto peragantur. Hoc uno notato, quod si numerus decimarum ultra 9 excrescat, sola dextima nota sit habenda pro *decima*, reliquae autem sinisteriores pro integris commate separandis. e. g.

Sint *Addendi*	3, 8 7 2 0, 4 0, 0 5 ;
Erit *summa*	4, 3 2 2.

230. PROBLEMA L. *Fractiones decimales subtrahere.*

Resolut. Ob rationem num. praec. indicatam subtractio quoque eodem modo peragitur in fractionibus decimalibus, quo in integris, subscribendo integra integris, decimas decimis &c.

e. g. Sit *minuendus*	3, 0 7 2
subtrahendus	1, 5 8 ;
Erit *residuum*	1, 4 9 2.

231.

231. PROBLEMA LI. *Fractiones decimales inter se multiplicare.*

Resolut. Multiplicentur inter se fractiones more numerorum integrorum: at in facto totali resecentur interjecto commate tot notæ dexteriores, quot in ambabus simul fractionibus notæ decimales erant. e. g. Si 2, 31 multiplicari debeat per 3, 42; multiplicationem more in integris consueto peragendo acquiritur factum totale = 79002: porro fractiones, quarum una per alteram multiplicata fuit, ambæ simul habent 4 notas decimales; itaque in facto hoc totali quatuor dexteriores notæ sunt resecandæ, ut fit 7, 9002. Quodsi facti totalis notæ non sufficerent totidem notis resecandis, quot decimales notas habent ambo simul factores; zeris præfixis augendæ sunt, dum sufficiant. e. g. Si fractio 0, 23 multiplicari debeat per 0,04; factum totale est = 92. Jam fractio multiplicanda duas habet notas decimales, totidem altera; itaque quatuor notæ resecandæ essent a facto totali: at istud duabus tantum notis constat; quapropter zeris præfixis augeatur, scribaturque 0, 0092.

Demonstr. Sit e. g. fractio 2, 31 multiplicanda per 3, 42. Prior æquivalet huic: $2\frac{31}{100}$; altera huic: $3\frac{42}{100}$ (224). Porro si integra reducantur ad fractionem, ejusdem cum adjectis fractionibus denominationis; prior abit in hanc: $\frac{231}{100}$, posterior in hanc; $\frac{342}{100}$ (48): ergo reapse in assumpto casu hæ duæ fractiones: $\frac{231}{100}$ & $\frac{342}{100}$ sunt inter se multiplicandæ. Harum autem multiplicatio peragitur, si numeratores inter se, & denominatores inter se multiplicentur (57).

 Ita-

Itaque pro numeratore novæ fractionis acquiritur reapſe illud factum, quod enaſcitur, ſi factores more in integris conſueto inter ſe multiplicentur: quæ proinde multiplicandi ratio rite præſcribitur in *Reſolutione* Problematis. At denominator novus $= 100 \times 100 = 10000$ tot zeris unitati adjectis conſtabit, quot in utroque ſimul denominatore zeri reperiuntur. Unde jam altera quoque *reſolutionis* pars, qua præſcribitur, in facto totidem notas dexteriores commate ſeparandas eſſe, quot in utroque ſimul factore notæ decimales erant, eluceſcit. Sic enim ratiocinari licet: Quoniam fractio decimalis ſemper totidem notis decimalibus conſtat, quot zeros continet ejus denominator (224); in facto totidem notæ dexteriores reſecandæ ſunt pro decimalibus, quot zeros continet denominator ejusdem facti: atqui denominator facti tot zeros continet, quot zeros continebant utriusque ſimul factoris denominatores, adeoque quot notæ decimales erant in utroque ſimul factore; ergo in facto totidem notæ dexteriores reſecandæ ſunt interjecto commate, quot in utroque ſimul factore notæ decimales erant.

232. Coroll. Si ergo fractio decimalis per numerum integrum multiplicari debeat; in facto (quod itidem communi multiplicandi methodo obtinebitur) nonniſi tot notæ dexteriores erunt commate ſeparandæ, quot notas decimales fractio illa habuerit. e. g. $2, 01 \times 12 = 24, 12$.

233. PROBLEMA LII. *Fractionem unam decimalem dividere per alteram.*

Resolut. *1mo.* Dividatur dividendus per diviſorem more in integrorum diviſione recepto: at in quoto tot notæ dexteriores ſeparentur interjecto commate, quot notis decimalibus ſuperat dividendus diviſorem. e. g. Si 2, 76 dividi debeat per 1, 2; more in integris uſitato diviſionem inſtituendo acquiritur quotus $= 23$: & quoniam dividendus unica habet plures notas decimales, quam habeat diviſor, in quoto unica nota dextima interjecto commate reſecanda eſt; hoc eſt, is quotus hoc modo ſcribi debet: 2, 3. Hac methodo rite peragi diviſionem decimalium vel inde patet, quod

quo-

quotus in divisorem ductus semper restituat dividendum. Sic in assumpto exemplo, si quotus 2, 3 in divisorem 1, 2 ducatur methodo n. 231 tradita, pro *facto* acquiritur ipse dividendus 2, 76. Hinc si in divisore totidem occurrant notæ decimales, quot in dividendo; in quoto nulla nota resecanda erit. e. g. Si 11, 20 per 0, 32 dividi debeat; quotus est 35: qui si in divisorem 0, 32 ducatur, restituit dividendum 11, 20 (232).

2*do*. Si in divisore plures occurrant notæ decimales, quam in dividendo; dividendi notis adjiciantur in fine zeri, unus, vel plures, donec numerus decimalium major evadat in dividendo, quam divisore, vel saltem æqualis utrobique. Hoc pacto dividendi valor non mutabitur (225), & tamen divisio jam per reg. 1*mam* institui poterit. e. g. Si 11, 2 per 0, 32 dividi debeat; addatur dividendo zerus, ut fit 11, 20, ac tum primum divisio per reg. 1*mam* instituatur: erit quotus, uti superius vidimus, = 35.

3*tio*. Si ex divisione quodpiam residuum maneat; addatur ei zerus, atque ita continuetur divisio. e. g. Si 1, 17 per 0, 5 dividi debeat; acquiritur quotus 23, & manet residuum 2 per 5 dividendum. Itaque residuo 2 addatur zerus, & 20 per 5 dividatur, novusque quotus 4 reliquis adjungatur: erit quotus totalis = 234. At zerus ille additus ita spectandus est, quasi jam initio additus fuisset dividendo: reapse enim hoc pacto 1, 170 dividitur per 0, 5. Hinc dividendus jam non una, sed duabus decimalibus superare divisorem 0, 5 censendus est: ac proinde per reg. 1*mam* duæ dexteriores quoti notæ sunt commate separandæ, seu quotus ille hoc modo scribendus est: 2, 34. Quodsi post primam zeri adjectionem adhuc maneat aliquod ex divisione residuum; rursus id genus residuo adjiciatur zerus, ac divisio methodo in integris usitata continuetur. Omnes autem zeri successive adjecti ita spectandi sunt, ac si jam initio adjecti fuissent dividendo. Unde, si quis hujusmodi successivas zerorum adjectiones evitare cupit; mox initio operationis aliquot zeros dividendo adjiciat.

e. g. Si 3, 2 per 0, 25 dividi debeat; acquiritur primo quotus = 1 cum residuo = 7. Huic residuo adjiciatur zerus, & 70 per 25 dividatur: erit altera quoti nota 2, manebitque residuum 20. Alteri huic residuo si adjiciatur zerus, & 200 per 25 dividatur; tertia quoti nota 8 absque omni jam residuo acquiretur. Erit adeo quotus totalis 128. At quoniam duo successive zeri adjecti sunt dividendo, reapse 3, 200 divisus est per 0, 25; adeoque per reg. 1*mam* in quoto unica nota dextima separanda est commate, seu quotus ille hoc modo est scribendus: 12, 8.

234. Coroll. Quoniam in quoto tot notæ dexteriores separandæ sunt interjecto commate, quot notis decimalibus superat dividendus divisorem; si fractio decimalis per numerum integrum fractione decimali prorsus carentem dividatur, in quoto totidem dexteriores notæ resecentur, oportet, quot notas decimales fractio dividenda habet.

Schol. Fractionum decimalium ad usus geometricos applicationem in Geometria dabimus.

CAPUT SEPTIMUM.

De Logarithmis.

235. Si progressioni arithmeticæ numerorum naturalium a zero initium sumenti subscribatur progressio geometrica, cujus primus terminus sit unitas; termini progressionis arithmeticæ erunt *logarithmi* sibi respondentium terminorum progressionis geometricæ. e. g. Si sint duæ hæ progressiones:

Arithmetica, 0, 1, 2 3, 4,

Geometrica, 1, 10, 100, 1000, 10000;

quivis terminus superior erit *logarithmus* inferioris sibi respondentis.

236. THEOREMA XXXVIII. *Logarithmi quantitatum sunt earundem quantitatum exponentes.*

Demonstr. Si primus progressionis geometricæ cujuscunque terminus vocetur a, exponens m; quævis progressio geometrica rite repræsentatur hac formula, a, am^1, am^2, am^3, am^4 &c. (216). At in ea progressione geometrica, cujus logarithmi sunt ipsa numerorum naturalium progressio arithmetica a zero sumens initium, primus terminus est $= 1$ (235); quodsi ergo de hac speciatim progressione geometrica sit sermo, in formula generali nunc adnotata est $a = 1$: consequenter si de dicta progressione geometrica speciatim sit sermo, ea rite repræsentatur (in superiore formula generali loco a ponendo 1) rite, inquam, repræsentatur per $1, m^1, m^2, m^3, m^4$ &c. seu ob $m^0 = 1$ (76) rite repræsentatur per m^0, m^1, m^2, m^3, m^4 &c. Jam vero si hæc geometrica progressio subscribatur arithmeticæ logarithmorum progressioni, num. præc. descriptæ, ut sit:

$$\begin{array}{ccccc} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \\ m^0, & m^1, & m^2, & m^3, & m^4; \end{array}$$

evidenter apparet, seriem logarithmorum prorsus eandem esse cum serie exponentium. Veritas ergo theorematis patet.

Schol. Exstant tabulæ logarithmorum pro serie continua numerorum naturalium; pro quibus conficiendis ea ipsa numerorum naturalium progressio geometrica assumpta est, quam n. 235 adnotavimus, quæve pro exponente habet numerum 10. Scilicet unitati assignatus est pro logarithmo zerus, numero decimo unitas, centesimo numerus 2, millesimo numerus 3, & sic porro. Unde consequens est, numerorum inter 1 & 10 intercedentium logarithmos esse majores zero, minores unitate, ac proinde esse fractiones; numerorum inter 10 & 100 intercedentium logarithmos esse majores unitate, at minores numero 2, adeoque esse æquales unitati cum adjuncta fractione, & sic porro. Id genus intermedios logarithmos ut determinarent dictarum tabularum constructores, logarithmorumque tabu-

fabulas (quarum ufus egregios in fequentibus videbimus) pro continua numerorum naturalium ferie conficerent; in arithmetica illa logarithmorum progreffione, quam n. 235 adnotavimus, quemlibet terminum converterunt in æquivalentem fractionem decimalem, additis cuilibet termino feptem zeris, tanquam totidem decimalibus: ac proinde eam progreffionem hoc modo fcripferunt: 0, 0000000; 1, 0000000; 2, 0000000; 3, 0000000 &c. tum in partibus decimalibus intermedios illos logarithmos variis proportionibus inftitutis determinarunt. e. g. Pro numero 2 inventus eft logarithmus 0, 3010300, qui zero major, at unitate minor eft: numero 20 refpondet in tabulis logarithmus 1, 3010300, unitate major quidem, at numero 2 (qui eft logarithmus numeri 100) minor. Recole naturam fractionum decimalium (224).

237. Prima cujusvis logarithmi nota, quæ a reliquis commate (quanquam in tabulis loco *commatis* punctum folet adhiberi) feparatur, defignatque numerum integrum in logarithmo partibus decimalibus præfixum, *characteriftica* vocatur. Hinc quoniam numeri 10 logarithmus eft = 1, 0000000 (236. *Schol.*), in logarithmis numerorum decimo minorum, characteriftica nonnifi *zerus* effe poteft: at in logarithmis numerorum a 10 inclufive, usque ad 100 exclufive characteriftica eft = 1; a 100 inclufive, ad 1000 exclufive eft characteriftica = 2 &c. Unde patet logarithmi characterifticam femper unitate minorem effe numero notarum omnium ejus numeri, cui logarithmus ille refpondet: ut adeo logarithmi characteriftica innotefcente illico innotefcat numerus notarum omnium ejus numeri, cui logarithmus ille refpondet, & viciffim. e. g. Si dati logarithmi characteriftica fit = 3, numerus, cui logarithmus ille refpondet, quatuor notis conftare debet: fi datus numerus conftet tribus notis; in ejus logarithmo characteriftica eft = 2.

238. PROBLEMA LIII. *Datos numeros inter fe multiplicare ope logarithmorum ipfis refpondentium.*

RE-

Resolut. Logarithmus multiplicatoris addatur logarithmo multiplicandi; summa enascens erit logarithmus *facti* quæsiti: adeoque is numerus erit *factum* quæsitum, qui novo huic logarithmo in tabulis respondet. e. g. Sit multiplicandus 89, multiplicator 97. Priori respondet in tabulis logarithmus 1, 9493900, posterioris autem logarithmus est 1, 9867717; quorum summa est = 3, 9361617. Itaque huic summæ, tanquam logarithmo respondens in tabulis numerus 8633 est quæsitum *factum*.

Demonstr. Logarithmi sunt *exponentes* numerorum sibi respondentium (236): atqui, si addantur exponentes factorum, summa enascens est exponens facti (21. *reg.* 4); ergo etiam si factorum logarithmi in unam summam addantur, obtinetur logarithmus facti.

239. Coroll. Itaque si numerus quispiam per se ipsum multiplicari, id est, ad quadratum elevari debeat; sufficit ejus logarithmum per 2 multiplicare: factum enascens erit logarithmus quæsiti quadrati.

240. PROBLEMA LIV. *Numerum unum dividere per alterum ope logarithmorum.*

Resolut. Logarithmi sunt exponentes quantitatum (236): atqui, si exponens divisoris subtrahatur ab exponente dividendi, obtinetur exponens quoti (27. *reg.* 3); ergo etiam si logarithmus divisoris subtrahatur a logarithmo dividendi, obtinetur logarithmus quoti. Sic si 8633 dividi debeat per 97; hujus logarithmus = 1. 9867717 subtrahatur ab illius logarithmo = 3. 9361617: residuum = 1. 9493900 erit logarithmus quoti. Hinc cum huic logarithmo respondeat in tabulis numerus 89; hic ipse numerus est quotus quæsitus.

241. PROBLEMA LV. *E dato numero quamcunque radicem ope logarithmorum extrahere.*

Resolut. Si exponens potentiæ dividatur per exponentem datum radicis, obtinetur exponens radicis quæsitæ (82): ergo etiam, si logarithmus datæ potentiæ

tiæ dividatur per exponentem datum radicis, obtinetur ejusdem radicis logarithmus (236). e. g. Sit ex 5184 extrahenda radix quadrata. Ejus numeri logarithmus = 3. 7146650 dividatur per exponentem radicis quadratæ, seu per 2; quotus = 1. 8573325 erit logarithmus radicis quæsitæ. Hinc cum logarithmo huic in tabulis respondeat numerus 72; hic ipse numerus est radix quadrata numeri 5184.

Schol. Ex his intelligere jam licet, tabulas logarithmorum (quæ passim prostant) egregiæ omnino utilitatis esse, cumprimis in calculo majorum numerorum. At sæpe in logarithmorum usu aliquam moram afferunt sequentia. 1) In tabulis nonnisi pro continua integrorum naturalium numerorum serie 1, 2, 3, 4 &c. habentur logarithmi. Hinc sæpius occurrit logarithmus, quem in tabulis frustra quæsieris, cujusmodi sunt logarithmi fractionum, aut integrorum aliquam fractionem adjunctam habentium. 2) Tametsi in maximis tabulis habeantur logarithmi numerorum naturalium ab 1 usque ad 100000; in minoribus tamen tabulis numeri 10000*mo* majores non reperiuntur cum suis logarithmis. Hinc sæpius occurrere potest in calculo logarithmus iis major, qui in tabulis, quas præ manibus quis habet, reperiri queant. Itaque pro superandis his difficultatibus aliqua adhuc problemata adjiciemus.

242. PROBLEMA LVI. *Invenire numerum ejusmodi logarithmo respondentem, qui non reperitur in tabulis, in quibus tamen eo logarithmo tam majores, quam minores reperiuntur.*

Resolut. Quoniam in tabulis continua numerorum integrorum series 1, 2, 3, 4 &c. adnotatur cum suis logarithmis; si logarithmus datus non reperiatur in tabulis, tametsi reperiantur alii illo majores, & minores, id erit indicio, datum logarithmum respondere numero integro aliquam fractionem adjunctam habenti: qui numerus hac methodo est inveniendus.

1) Logarithmus, qui dato logarithmo proxime minor est in tabulis, subtrahatur a logarithmo proxime majore, & prima hæc differentia notetur.

2)

2) Idem logarithmus proxime minor ſubtrahatur etiam a dato logarithmo, & altera hæc differentia pariter notetur.

3) Jam differentia eorum numerorum, quorum uni reſpondet in tabulis logarithmus dato logarithmo proxime minor, alteri autem logarithmus dato proxime major, eſt $= 1$. Quæ unitas convertatur in fractionem decimalem additis ipſi aliquot zeris, e. g. in hanc, 1,000; tum inferatur: differentia prima, ſcilicet duorum logarithmorum, quorum alter in tabulis eſt proxime minor dato logarithmo, alter proxime major, dat differentiam numerorum ipſis reſpondentium, quæ ſit $= 1,000$; ergo differentia altera, nempe logarithmi dati, & logarithmi illo proxime minoris, quam dabit differentiam numerorum ipſis reſpondentium? Inventus quartus proportionalis ſumi poterit pro differentia, qua numerus dato logarithmo reſpondens excedit numerum logarithmo proxime minori in tabulis reſpondentem: quæ proinde differentia ſi addatur ei numero, qui in tabulis dicto logarithmo proxime minori reſpondet, acquiritur numerus dato logarithmo reſpondens.

e. g. Detur logarithmus in tabulis non occurrens 3.7073546, & quæratur numerus eidem reſpondens. 1) Logarithmus in tabulis proxime minor 3.7073146 a logarithmo proxime majore 3.7073998 ſubtractus relinquit differentiam 852. 2) Idem proxime minor logarithmus a dato logarithmo ſubtractus relinquit differentiam 400. Itaque 3) hæc fiat proportio, $852 : 400 = 1,000 : x$; ſeu primam rationem per 4 dividendo, $213 : 100 = 1,000 : x$.

Jam medios inter ſe multiplicando acquiritur factum $= 100,000$ (n. 231): quod factum dividendo per terminum primum, eſt proxime $x = 0,469$ (n. 224). Hinc ſi hæc fractio addatur numero 5097, qui in tabulis reſpondet minori logarithmo 3.7073146; obtinebitur numerus 5097,469 dato logarithmo (quantum quidem ad praxim attinet) ſat accurate reſpondens.

243. PROBLEMA LVII. *Invenire numerum ejusmodi logarithmo dato respondentem, qui excedat omnes eos logarithmos, qui in tabulis continentur.*

Resolut. A dato logarithmo subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000 &c. donec residuus logarithmus jam minor sit, quam sit ultimus in tabulis: quæratur deinde numerus huic residuo logarithmo respondens in tabulis, ac multiplicetur per 10, vel per 100, vel per 1000 &c. prout nempe logarithmum numeri 10, vel numeri 100, aut 1000 &c. subtraxisti a logarithmo dato. Factum enascens erit ipse numerus quæsitus.

e. g. Si in tabulis, quas præ manibus habes, ultimus logarithmus sit 4. 0000000, quæraturque numerus logarithmo 5. 7104559 respondens; ab hoc logarithmo subtrahatur logarithmus numeri 100, qui est 2. 0000000: residuus logarithmus erit = 3. 7104559. cui in tabulis respondet numerus 5134. Hic itaque numerus si per 100 multiplicetur, acquiretur quæsitus numerus = 513400. Scilicet si numerus quispiam per 10 multiplicetur, ejus logarithmus interea unitate crescit; si idem numerus multiplicetur per 100, ejus logarithmus interea duabus unitatibus augetur; uti ex contemplatione progressionum num. 235, & 236 adnotatarum intelligere licet.

244. PROBLEMA LVIII. *Invenire logarithmum numeri fractionem decimalem adnexam habentis.*

Resolut. Quæratur logarithmus e. g. numeri 5326, 4. Numeri integri 5326 absque adjecta fractione considerati logarithmus 3, 7264012 subtrahatur a logarithmo in tabulis proxime majore 3. 7264827, noteturque differentia 815. Jam numerus 5326 ab eo numero, cui logarithmus ille proxime major respondet, unitate differt; & idem numerus 5326 a dato numero 5326, 4 differt 4 decimis. Hæc ergo instituatur quæstio: *numerorum differentia = 1 dat logarithmorum ipsis respondentium differentiam = 815; ergo numerorum differentia = 0; 4 quam dabit differentiam logarithmorum ipsis respondentium?* Ex qua per regulas regulæ aureæ simplicis (206) hæc proportio eruitur, $1 : 0, 4 = 815 : x$. Unde x (seu differentia inter logarithmos numerorum 5326 & 5326, 4)

4) eſt = 326: quæ differentia ſi logarithmo 3. 7264012 addatur, obtinetur logarithmus quæſitus 3. 7264338.

245. PROBLEMA LIX. *Invenire logarithmum numeri majoris, quam ſint ii, quorum logarithmi habentur in tabulis.*

Resolut. Unâ vel plures finales dati numeri notæ deprimantur ad fractionem decimalem; tum pro numero illo ita jam conſiderato, ac ſi ex integris, & adjunctis decimalibus conſtaret, inveniatur logarithmus methodo n. 244 tradita. Denique inventi logarithmi characteriſtica tot unitatibus augeatur, quot notæ ad fractionem depreſſæ fuerunt.

e. g. Si in tabulis, quæ præ manibus habes, non reperiatur logarithmus numeri 10000*mo* majoris, & tamen quæratur logarithmus numeri 53264; dextimam dati numeri notam 4 deprime ad fractionem decimalem, ut ſit 5326, 4: tum methodo num. præc. tradita inveni hujus numeri logarithmum 3. 7264338. Si hujus logarithmi characteriſticam unitate (cum unica duntaxat nota fuerit ad fractionem decimalem depreſſa) auxeris; obtinebis numeri dati logarithmum 4. 7264338.

246. PROBLEMA LX. *Invenire logarithmum cujuscunque fractionis.*

Resolut. In qualibet fractione numerator eſt dividendus, denominator *diviſor*, & ipſa fractio *quotus* (36). Jam vero ſi logarithmus diviſoris ſubtrahatur a logarithmo dividendi; reſiduum eſt logarithmus quoti (240): ergo ut fractionis logarithmum acquiras, logarithmus denominatoris ſubtrahendus eſt a logarithmo numeratoris. Hinc ſi numerator denominatore minor fuerit, uti ſemper eſt in fractionibus genuinis; reapſe logarithmus numeratoris ſubtrahendus erit a logarithmo denominatoris, & reſiduo ſignum — præfigendum. Nam generatim, ſi quantitas major a minore ſubtrahenda ſit, reapſe minor debet a majore ſubtrahi, & reſiduo ſignum — præfigi. Sic $3 - 5 = -2$; $a - 2a = -a$ &c. Hinc ſi quæratur e. g. logarithmus fractionis $\frac{2}{3}$; quoniam numerator eſt minor denominatore, numeratoris

toris logarithmus 0. 3010300 ſubtrahatur a denominatoris logarithmo 0.4771212, tum reſiduo præfigatur ſignum —; erit logarithmus quæſitus = — 0. 1760912. Et ſane, quoniam logarithmus unitatis eſt 0,0000000 = 0, fractionum unitate minorum logarithmi, *zero* minores, ac proinde negativi ſint, eſt neceſſe.

At ſi fractionis numerator denominatore major fuerit; logarithmus quoti erit poſitivus. Sic ſi quæratur logarithmus fractionis $\frac{3}{2}$; denominatoris logarithmus 0. 3010300 ſubtrahi poterit a numeratoris logarithmo 0. 4771212, relinquetque poſitivum reſiduum = 0. 1760912: quod ipſum reſiduum erit quæſitus fractionis $\frac{3}{2}$ logarithmus.

247. Coroll. Si integer numerus adjunctam habeat quamcunque fractionem; poteſt totus numerus reduci ad fractionem impropriam (48), atque ita ejus logarithmus methodo nunc expoſita inveniri. e.g. Numeri $5\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$ logarithmus acquiritur, ſi logarithmus numeri 3 ſubtrahatur a logarithmo numeri 17, ſeu is logarithmus eſt = 1. 2304489—0. 4771212
= 0. 7533277.